த. பா. நி. (க.வெ.) வரிசை எண் — 777

சார்பியலும் குவான்டம் விசையியலும்

(பட்டப் படிப்பிற்குரியது)

(திருத்தப்பட்ட பாடதிட்டத்தின்படி வெளியிடப்படுகின்றது)

ஆசிரியர்

டாக்டர் **ஆர். பிச்சை**, எம்.ஏ., எம்.எஸ்ஸி., பிஎச்.டி.,

இயற்பியல் தலைமைப் பேராசிரியர்,

ஸ்ரீ இராமகிருஷ்ண மிஷன் வித்யாலயா கலைக் கல்லூரி,

கோயமுத்தூர்.



தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition - November, 1977
Number of Copies — 2000

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 777

RELATIVITY AND QUANTUM MECHANICS

Dr. R. PICHAI

Price Rs. 8-35

Published by the Tamilnadu Textbook Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

This book has been Printed on concessional paper made available by the Government of India.

Printed by

Nanbargal Achagam,
Madras—600 018.

அணிந்துரை

(திரு. செ. அரங்கநாயகம், தமிழகக் கல்வி அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதினேழாண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் இளங்கலை வகுப்புவரை மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்று வந்தனர். 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளில் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்துள்ள நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மனநிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ்வகையில் கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்களுக்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகமும் சென்னைப் பல்கலைக்கழகமும் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

வரலாற்றியல், அரசியல், உளவியல், பொருளியல், மெய்ப்பொருளியல், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதவியல், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல், சட்டவியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் மூலநூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்று இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் நூல்களை வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான **சார்பியலும் குவான்டம் விசையியலும்** என்னும் இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 777ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான 35 நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை 812 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு, கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் 'மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்ட'த்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

தமிழில் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும் என்பதே நம் குறிக்கோளாகும். கல்லூரிகளிலும் பல்கலைக்கழகங்களிலும் கலையியற் பாடங்களையும், அறிவியற் பாடங்களையும், தொழில்நுட்ப அறிவுப் பாடங்களையும் பயிலுகின்ற மாணவர்கள், அவற்றைத் தமிழில் பயில வேண்டும் என்பதை வலியுறுத்தி வருவதற்குக் காரணம், தமிழறிவு வளர வேண்டும் என்பதைவிட, தமிழ் மக்களின் அறிவு ஆற்றல் எளிதாக, விரைவாக வளரவேண்டும் என்பதுதான். 'எதிலும் தமிழ்; எங்கும் தமிழ்' என்னும் குறிக்கோளை நிறைவேற்ற வேண்டிய கடப்பாடு தமிழக ஆசிரியப் பெருமக்களையும் மாணவர்களையும் சார்ந்ததாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக்கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம்கலந்த நன்றி உரியதாகுக!

செ. அரங்கநாயகம்

பொருளடக்கம்

பாகம் I—சார்பியல்

பாகம் 2—குவாண்டம் விசையியல்

பாகம் 1

சார்பியல்

1. சார்பியலின் பிறப்பு

(Birth of Relativity)

1-1. தோற்றுவாய் (Introduction)

அறிவியல் உலகிற்குச் சார்பியல் கொள்கையினை ஈந்த மாபெரும் விஞ்ஞானி டாக்டர் ஐன்ஸ்டைன் ஆவார். அரை நூற்றுண்டுகளுக்கு முன்னர் தோன்றிய இக் கொள்கையினை ஐன்ஸ்டைன் முதன் முதலாக விளக்கியபோது பலரும் நம்புவதற்குத் தயங்கினர்; இன்னும் பலர் பெருவியப்பில் ஆழ்ந்தனர்; இயற்பியல் துறையையே திடுக்கிட வைத்து ஒரு பெரிய பரபரப்பை அறிவியல் உலகில் ஏற்படுத்தியதும், இக் கொள்கையினை உண்மையென ஏற்க மறுத்தவர்கள் பலர். அறிவியல் அறிஞர்கள் பலருக்கும் இக் கொள்கையைப் புரிந்து கொள்வதில் முதலில் பெருஞ் சிக்கல் ஏற்பட்டது. இச் சிக்கலை நீக்குவதற்காகப் பேராசிரியர் ஸ்மித், அறிவியல் அறிவு குறைந்தோர்க்கும் இல்லாதவர்களுக்குமென ஓர் எளிய நூலில் சார்பியல் கொள்கையை விளக்கிச் சமர்ப்பித்தார். இவர் எழுதிய நூலினைப் படித்த ஒருவர், 'பேராசிரியர் ஸ்மித் ஆல்பர்ட் ஐன்ஸ்டைனைவிட அறிவியல் புலமை மிக்கவர் போன்று தோன்றுகிறதே!' என்றுர். ஐன்ஸ்டைன் தமது கொள்கையை உலக விஞ்ஞானிகள் குழுவில் விளக்கியபோது, அவர்களில் பன்னிரண்டு விஞ்ஞானிகள் மட்டுமே அதனைத் தெளிவாகப் புரிந்து கொண்டனர். ஆனால், ஐன்ஸ்டைனின் சார்பியல் கொள்கைபற்றிய எளிய நூல் குறித்து ஸ்மித் அவர்கள் விளக்கியபோது அக் கொள்கைகளைப் புரிந்துகொள்ள ஒருவர் கூட இல்லையாம். ஆகவே, டாக்டர் ஐன்ஸ்டைனைவிட டாக்டர் ஸ்மித் புலமை மிக்கவர் என்று நகைச்சுவை தோன்றக் கூறினர்! இதனால் சார்பியல் கொள்கையினைத் தெளிவாகப் புரிந்து கொள்வதில் சிறிது கவனம் தேவை என்பது வெள்ளிடைமலை.

ஒளி பரவும் முறைபற்றிக் கருத்துவேறுபாடுகள் இருந்தன. அதுகுறித்துப் பல விஞ்ஞானிகள் துருவி ஆராய்ந்து வந்தனர். 'ஒளி எவ்விதம் ஓரிடத்திலிருந்து மற்றோர் இடத்திற்குச் செல்கிறது? ஒலி அலைகள் பரவ ஊடகம் தேவைப்படுதல் போல்

ஒளி அலைகளுக்கும் ஊடகம் தேவையா? ஒளி அலைகளாகப் பரவுகின்றதா அல்லது துகள்களாகப் பரவுகின்றதா? ஒளி பரவும்போது ஊடகத்தில் ஏதாவது மாற்றம் ஏற்படுகின்றதா?' இவ்வாறு பல வினாக்களும் ஐயங்களும் இருந்தன. இது பற்றி ஆராயும் முயற்சிகளின் போதுதான் திடீர் விளைவாகவோ அல்லது எதிர்பாராத விளைவாகவோ 'சார்பியல் கொள்கை' உருவாகியது.

எளிமைக்கும் அடக்கத்திற்கும் உறைவிடமான ஆல்பர்ட் ஐன்ஸ்டைன் அறிவியல் உலகின் சிந்தனைப் போக்கில் ஒரு புரட்சியைத் தமது சார்பியல் கொள்கையை வழங்கியதன் மூலம் தோற்றுவித்தார். ஒரு சமயம் சார்பியல் கொள்கை என்றால் என்ன என்பதை அவர் இரத்தினச் சுருக்கமாக இன்பக் கிளர்ச்சியூட்டும் வகையில்—தயக்கமின்றிக் கூறினார். அவர் கூறுவது. 'ஓர் அழகிய பெண்ணின் அருகில் அமர்ந்து அளவளாவும் ஒவ்வொரு மணி நேரமும் ஒவ்வொரு வினாடியாகத் தோன்றலாம். ஆனால், அதே மனிதன் அனல் கக்கும் அடுப்பின் மீது அமர்வானேயானால் ஒரு விநாடியே பல மணி நேரத்திற்கு மேலாகத் தோன்றும். இதுதான் சார்பியல் கொள்கை!' எளிமை, நகைச்சுவை, இன்பக் கிளர்ச்சி ஆகியவற்றிற்குப் பஞ்சமில்லாத இவர் கொள்கையைப் புரியாத பாமரரும் ஒரு நொடியில் புரிந்துகொள்ளும் வகையில் எடுத்துரைத்துள்ளார்.

அரை நூற்றாண்டுகளுக்கு முன்பு ஐன்ஸ்டைன் தனது சார்பியல் கொள்கையை விளக்கிக் கூறியபோது அது அறிவியல் உலகுக்கோர் கிளர்ச்சியூட்டிவிட்டது. எனினும், இக் கொள்கையை நம்புவதற்கே ஒருவரும் இல்லை என்ற நிலையும் முன்னர் இருந்தது. சார்பியல் கொள்கைபற்றி எண்ணற்ற நூல்கள் வெளிவரத் தொடங்கின. பல பரிசோதனை நிருபணங்கள் அவர்தம் கொள்கைகளை மெய்ப்படுத்தும் சான்றுகளாக விளங்கின. இக் கொள்கையில் அன்று வரை தீர்வு காண இயலாத பல பிரச்சினைகளுக்குத் திருப்தியளிக்கும் வகையில் தீர்வு காண முடிந்தது. அதன் பின்னரே, அறிவியலாரும் மக்களும் இக் கொள்கையை உண்மையெனக் கருதி ஏற்றுக் கொள்ள முன்வந்தனர்.

பத்தொன்பதாம் நூற்றாண்டின் இறுதியில் கடலிலே கடல் அலைகள், காற்றிலே ஒலி அலைகள் ஆகியன எவ்வாறு பரவுகின்றனவோ அதேபோன்று ஒளியும் அலை அதிர்வு முறையில் பரவ வேண்டும் என்ற கருத்து வேரூன்றியிருந்தது. ஒலி பர

அசைவு ஏற்பட வேண்டும். காற்றில் அசைவுகள் ஏற்பட்டு ஒலி பரவுகின்றது. ஆனால், ஒளி அங்ஙனம் பரவ எப் பொருள் எவ்வாறு அசைகின்றது எனப் பார்ப்போம். கண்ணாடி, நீர், காற்று, வெற்றிடம் ஆகிய எல்லாவற்றிலும் ஒளி பரவுவதாகக் காண்கிறோம். சூரியனிடமிருந்து வரும் ஒளி வெற்றிடத்தைத் தாண்டி நம்மை வந்தடைகின்றதல்லவா? எனவே, ஊடகம் ஏதுமில்லாத வெற்றிடத்திலும் ஒளி பரவும் தன்மையுடையது என்பது தெளிவாகிறது.

அன்றைய நிலையில், ஒளி பரவ எந்த ஊடகமும் வேண்டியதில்லை என்று சொல்ல அறிவியல் அறிஞர்கள் விருப்பவில்லை. அசைவு ஏற்படுத்தாது ஒளி பரவ இயலாது என்றும் கருதினர். எனவே, ஒரு புதிய ஊடகத்தை ஏன் கற்பனை செய்து கொள்ளலாகாது என்று எண்ணினர். அதன்படி வெளியெங்கிலும் நிறைந்து நிற்கும் ஈதர் என்ற பொருளே எல்லாப் பொருள்களையும் ஊடுருவிப் பாயும் தன்மை யுடையது என்று கற்பித்தார்கள். இது நம்மையும் ஊடுருவிச் செல்வதால் நம்மால் பார்க்க இயலாது என்றும் விளக்கினர்; இதை உணரவும் முடியாது என்றனர். இதனை நம்புவோர் எண்ணிக்கை நாளடைவில் அதிகரித்தது.

இத்தகைய ஈதர் என்ற ஒரு பொருள் இருக்கிறதா என்று கண்டறிய இருவர் சேர்ந்து ஒரு சோதனையைச் செய்ய முடிவு எடுத்தனர். 1881ஆம் ஆண்டில் ஆல்பர்ட் மைக்கல்சனும் மற்றும் எட்வர்ட் மார்லியும் இச் சோதனையைச் செய்யத் தொடங்கினர். புவி, தன்னைத் தானே சுற்றிக் கொண்டும், வானில் இயங்கிக் கொண்டுமிருக்கிறது. புவி சுற்றும்போது காற்று வீசுகின்றது. இதே போல ஈதரும் வீசத் தொடங்கும் என அவர்கள் எண்ணினர். காற்று வீசுகிறதோ இல்லையோ நாம் வேகமாய் இயங்கும்போது காற்றை நாம் உணர்கிறோம். இதே போன்று ஈதர் உணர்வைப் பெற முடியுமா என்று முயற்சி செய்தனர்.

இருவரும், ஒரே அலை நீளமுள்ள ஒளிக்கற்றையைப் பயன் படுத்தி அதனைப் பல்வேறு திசைகளில் செலுத்திப் பார்த்தனர். ஈதர் பாயும் திசையிலும், அதற்கு நேர் எதிர்த் திசையிலும் ஒளியைச் செலுத்திப் பார்த்தனர். பின்னர் இரண்டு நிலைகளிலும் ஒளியின் வேகத்தைத் துல்லியமாக அளந்து பார்த்தனர். ஒளியின் வேகம் இதனால் எவ்வித மாறுதலும் அடையவில்லை என்று கண்டனர். எனவே, ஒளியின் வேகத்தில்

ஈதர் ஓட்டம் மாறுதல் ஏதும் செய்யவில்லை என்பதைக் கண்டனர். ஒளியின் வேகம் வெற்றிடத்தில் 3×10^8 மீட்டர்கள் / வினாடி. இந்த மதிப்பினை ஈதர் ஓட்டம் சிறு அளவில்கூடப் பாதிக்கவில்லை. எனவே, சோதனையாளர்கள் எதிர்பார்த்த முடிவிற்கு நேர்மாறான ஒரு முடிவினைக் கண்டனர்.

ஈதர் ஓட்டத்தையும் அதன் விளைவினையும் காணாத இம் முடிவு ஓர் எதிர்பாராத முடிவு! இதற்குப் பலர் விளக்கம் தர முயன்றனர். இவ்விளக்கங்களில் ஃபிட்ஸ்ஜெரால்ட் என்பாரின் கருத்துச் சிறப்பானது. ஒரு பொருள் ஒரு திசையில் நகர்ந்து செல்வதாகக் கொண்டால் அதன் திசை வேகத்திற்கேற்ப அப்பொருளின் நீளம், செல்லும் முனைப் பகுதியில் குறுகிவிடும் என்ற கருத்தினைக் கொண்டு மேற்கண்ட பிரச்சனைக்கு விளக்கம் தர முனைந்தார். மைக்கல்சன்-மார்லியின் ஆய் கருவியானது ஒளியின் திசை வேகத்தைக் காணும்போதும் அல்லது அலை நீளத்தைக் காணும்போதும் இயங்கிக்கொண்டிருக்கிறது. ஈதர் மண்டலத்தில் புவியின் திசை வேகத்தோடு கருவியும் இயங்குகிறது. எனவே, இயங்கும் கருவியின் நீளம் குறுகி விடுகின்றது. அதனால்தான் ஈதர் ஓட்டம் ஒளியின் வேகத்திலே மாறுபாடு ஏதும் நிகழ்த்தாதது போன்ற ஒரு தோற்றத்தினைத் தருகின்றது என்றார்.

Henry Lorentz

1835ஆம் ஆண்டில் ஹென்ட்ரிக் லோரண்ட்ஸ் என்பார் ஃபிட்ஸ் ஜெரால்டின் கருத்துக்கு ஒத்த கணித இயல்புடைய 'ஃபிட்ஸ் ஜெரால்டு-லோரண்ட்ஸ் புனைவுகோள்' ஒன்றை வெளியிட்டார். பொருள்களின் நீளக் குறைவினைக் கண்டறிய இத் தத்துவம் பயன்படுவதாக அமைந்துள்ளது. ஒரு பேருந்து வண்டி 50 கிலோ மீட்டர் வேகத்தில் செல்வதாகக் கொண்டால் அதன் நீளத்திலே குறைவு காணப்படும். அப்பேருந்தின் உண்மையான நீளத்தை 0·999999999999 என்பதால் பெருக்க அப்போது கிடைக்கும் குறைவான மதிப்பே வேகமாகச் செல்லும் அப் பேருந்தின் நீளமாகும். இந் நீளக் குறைவு மிகவும் குறைந்ததாக இருக்கும். ஒளியின் திசை வேகத்திற்கு ஒப்பான வேகத்தில் ஒரு பொருள் செல்லும்பொழுது நீளக் குறைவு அதிகமாக ஏற்படும். ஒளியின் வேகத்தில் 50 விழுக்காடு திசை வேகத்தில் ஒரு பொருள் இயங்குவதாகக் கொண்டால் அதன் நீளம் அசையா நிலையில் உள்ள நீளத்தில் 85 விழுக்காடு குறைந்து விடும். இந் நீளக் குறைவினை கேலி செய்யும் ஒரு வேடிக்கைப் பாடலும் உண்டு. 'ஃபிஸ்க் என்ற இளைஞன் கிரிக்கெட் பந்து எறிவதிலே வல்லவன். அவன் பந்தை வீசும் வேகம் எல்லை

யற்றது ஃபிட்ஸ் ஜெரால்ட் தத்துவத்தின் காரணமாக அவன் எறிந்த கோள வடிவங் கொண்ட பந்து கட்டையான தட்டாக மாறிவிட்டது.' இதுவே மேற்சொன்ன வேடிக்கைப் பாடலின் பொருளாக அமையும். சார்பியல் கொள்கையின் சில முடிவு களைச் சிலர் நம்ப மறுத்தனர், இன்னும் சிலர் புரிந்துகொள்ள முடியாமல் எள்ளி நகையாடினர்.

மேற்கூறிய பிரச்சினை உலக அறிவியல் வல்லுநர்கள் அனைவருக்கும் ஒரு கேள்விக்குறியாக அமைந்தது. இப் பிரச் சினையை ஆராய்வதில் ஸ்விட்சர்லாந்து நாட்டுப் பொன் நகரத்து இளைஞன் ஒருவனும் முனைந்திருந்தான். அவனுக்கு வயது இருபத்தாறே! அவன் காப்புரிமைச் சட்டப் பணிமனையில் கடைநிலைத் தொழில் துறையில் பணி செய்யும் வாய்ப்பினைப் பெற்றிருந்தான். அறிவியல் ஆர்வம் மிக்கவன்; நிரந்தரமில்லாத ஆசிரியராகவும் குறுகிய காலம் பணியாற்றியவன்; காப்புரிமைச் சட்ட அலுவலகத்தில் வேலை செய்வதால் அவனுக்குத் தன் அறிவியல் அறிவைப் பெருக்கிக் கொள்ளத் தேவையான ஓய்வு கிடைத்து வந்தது. இவனே, பின்னர் உலகப் புகழ் பெறவிருக்கும் அறிவியல் மேதை ஆல்பர்ட் ஐன்ஸ்டைன் ஆவான்!

மைக்கல்சன், மார்லி, ஃபிட்ஸ் ஜெரால்டு, லோரண்ட்ஸ் ஆகிய நான்கு அறிவியல் வல்லுநர்களின் கொள்கைகளையும் அவற்றின் உட்கருத்தையும் மிகவும் எளிதாக ஐன்ஸ்டைன் புரிந்து கொண்டார். மேலும், அவற்றை அடிப்படையாகக் கொண்டு இருபதாம் நூற்றாண்டு அறிவியல் துறையில் ஒரு புரட்சியை ஏற்படுத்தும்படியான ஒரு புதிய 'சார்பியல் கொள்கையினை' உலகிற்கு ஈந்தார். இதன் தொடர்பாக இரண்டு நூல்களையும் அவர் வெளியிட்டார். முதல் நூல் 'சிறப்புச் சார்பியல் கொள்கை' ஆகும். இந் நூல் 1905ஆம் ஆண்டில் வெளியிடப்பட்டது. 'பொதுச் சார்பியல் கொள்கை' என்ற இவரது இரண்டாம் நூல் 1916ஆம் ஆண்டில் வெளியிடப் பட்டது.

சிறப்புச் சார்பியல் கொள்கை: இந் நூல் அவரது கருத்து களையும் புனைவு கோள்களையும் (hypothesis) அடிப்படையாகக் கொண்டு உருவானது. இக் கொள்கையின்படி உலகில் உள்ள எல்லா இயக்கங்களும் அசைவுகளும் தனித் தன்மையுடையன அல்லது சார்பில்லாதன என்று வரையறுத்து உறுதிப்படுத்த இயலாது என்பது தெளிவாகும். ஒன்றின் இயக்கமானது

மற்றொன்றைச் சார்ந்துதான் உள்ளது. இயக்கம் அல்லது அசைவு என்றவுடன் அதன் சார்புத் தன்மையை மறந்துவிடக் கூடாது. எனவே, சார்பியலுக்கு ஒரு முக்கியத்துவம் உண்டு. இதனுல்தான் ஐன்ஸ்ட்டைன் தமது கொள்கைக்குச் 'சார்பியல் கொள்கை' என்ற தலைப்பினைப் பொருத்தமாக அமைத்தார்.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு புகை வண்டி மணிக்கு 80 கிலோ மீட்டர் வேகத்தில் செல்லுகிறது என்று சொல்லும்பொழுது இதில் முழுச் செய்திகளும் கொடுக்கப்படவில்லை என்றுதான் சொல்ல வேண்டும். இப் புகை வண்டியின் வேகம் தரையினைச் சார்ந்து, 80 கிலோ மீட்டர் என்ருல் ஓரளவு சந்தேகமின்றி உள்ளது. எனவே, புகை வண்டியின் வேகத்தைத் தரையோடு சார்புபடுத்திக் கூறவேண்டும். பின்னுல் சொன்னதுகூடப் புகைவண்டியின் உண்மையான வேகத்தைக் கூறுவதாக அமையாது. ஏனெனில், தரை — அதாவது புவி — தன்னைத் தானே சுழன்று கொண்டும் வெளியிலே ஊர்ந்தும் செல்கிறது. புவி, சூரியனை மையமாகக்கொண்டு வலம் வருகிறது. எனவே, புவியின் வேகத்தைப்பற்றிச் சொல்லவேண்டுமானுல் சூரியனைச் சார்ந்து சொல்லவேண்டும். சூரியன் வேகத்தையும் துல்லியமாகச் சொல்ல முடியாது. எனவே, புகைவண்டியின் வேகத்தைத் துல்லியமாகச் சொல்வது என்பது இயலாத ஒன்று! இவ் வுலகிலும் மற்றப் பிரபஞ்சங்களிலும் எதுவும் அசைவின்றி நிற்பது இல்லை. ஆகவே, நிலையாக நிற்பதற்கு ஏதுமில்லா உலகில், புகைவண்டியின் வேகத்தை, எதனைச் சார்புபடுத்தி எங்ஙனம் துல்லியமாகச் சொல்வது?

அறிஞர் ஐன்ஸ்ட்டைன் இக்கண்ணேட்டத்தோடு ஈதர் என்ற நிலையான எங்கும் பரவியுள்ள கற்பித ஊடகத்தைப் பார்த்தார். ஈதர் என்ற ஒரு பொருள் சலனமற்று இருப்பது என்பது இயலாத செயல் என்பதனையும் கண்டறிந்தார். அவர் கொள்கைப்படி உலகில் ஏற்படும் எல்லா அசைவுகளும் இயக்கங் களும் சார்பு இயல்பு கொண்டவையாகும். எனவே, ஈதர் என்ற ஒரு சலனமற்ற ஒரு பொருள் உலகில் இருக்க முடியாது என்றும் கூறினர்.

இரண்டு மேற்கோள் தொகுதிகளை எடுத்துக் கொண்டு ஒன்றைச் சீரான திசை வேகத்தில் மற்றொன்றைச் சார்ந்து இயங்குவதாகக் கொண்டால், இயங்கு சட்டத்தில் நிலையாக உள்ளவர்க்கு, தான் நிலையாக இருப்பது போலவே தோன்றும். அவருக்குத் தம் தொகுதி இயங்குகிறதா அல்லது நிலையாக

இருக்கிறதா என்று கண்டு கொள்வது அரிய செயலாகவே அமையும்.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு நேராக ஓடும் புகைவண்டியிலே ஒருவர் அமர்ந்து இருப்பதாகக் கொள்வோம். அவர் ஓர் ஐம்பது பைசா நாணயத்தைக் கீழே நழுவ விடுவதாகக் கொள்வோம். இப்போது அந்நாணயம் கீழே விழுவதற்குள் புகை வண்டி சற்று நகர்ந்திருக்கும். எனவே, அந் நாணயம் நேர்கீழே விழுந்திருக்க முடியாது என்று எண்ணுவோம். ஆனால், நாணயத்தைக் கீழே நழுவ விடுபவரும் நாணயமும் ஒரே மேற்கோள் தொகுதியில் (இயங்கும் புகை வண்டியில்) இருப்பதால் அந் நாணயம் நேர் கீழேதான் விழும். அதன் பாதை நேர் கோடாகத்தான் அமையும். ஆனால், இதே காட்சி ஓடும் புகை வண்டிக்கு வெளியே நின்று நோக்கும் ஒருவருக்குச் சற்று வளைந்து காணப்படும். இதில் எப் பாதை சரியானது என்ற வினா எழ வாய்ப்புள்ளது. சார்பியல் கொள்கைப்படி இரண்டு பாதைகளும் சரியானதேயாகும். புகைவண்டிக்கு வெளியே நிற்கும் நோக்குநர் புவியைத் தமக்கு மேற்கோள் சட்டத் தொகுதியாகக் கொண்டு நோக்குகிறார். ஆனால், புகைவண்டியில் உள்ளவர் இயங்கும் புகைவண்டியைத் தமது மேற்கோள் சட்டத் தொகுதியாக வைத்து நிகழ்ச்சியினைக் காண்கிறார். எனவே, கீழே விழும் அந் நாணயத்தின் பாதை சார்பில்லாதது அன்று. பாதையானது நாம் இருந்து நோக்கும் மேற்கோள் சட்டத் தொகுதியின் தன்மையைப் பொறுத்தே அமைகின்றது.

மேலும் நீங்கள் சன்னல்களே இல்லாத ஒரு புகைவண்டியில் பிரயாணம் செய்வதாகக் கொண்டால், நீங்கள் புகைவண்டி இயங்கிக் கொண்டிருக்கிறதா அல்லது நிலையாக இருக்கின்றதா என்பதைக் கண்டறிவதில் சிரமம் ஏற்படும்.

சீரான வேகத்தில் இயங்கிச் செல்லும் தொகுதியின் இத்தகைய இயல்பினை அடிப்படையாகக் கொண்டு, ஒளியின் இயல்பு முறையும் இவ்வாறே இருக்க வேண்டும் என்று ஐன்ஸ்டைன் எண்ணினார். வெற்றிடத்தில் ஒளி பரவும் திசை வேகம் ஒரு மாறிலி ஆகும். அதனைக் காண்போருக்கும் இது தெரியும். ஒளியினைப் பற்றிய இக் கருத்து சார்பியல் கொள்கையின் ஆணிவேராக அமைந்தது. ஒளி மூலம் இயங்கினாலும் இயங்காவிட்டாலும் — ஒளி பெறும் பொருள் இயங்கினாலும் இயங்காவிட்டாலும் — இதனை நோக்குவோர்க்கு அதன் திசை வேகம் ஒன்றுதான். ஒளியின் வேகம்

3×10^8 மீட்டர்கள்/விநாடி ஆகும். அதாவது, ஒளியின் வேகம் ஒரு விநாடிக்கு 186,000 மைல்களாகவே எப்போதும் இருக்கும் என்பதாகும்.

மேற்கூறிய கருத்தினை அவ்வளவு எளிதாக ஏற்றுக் கொள்ள முடியுமா? ஏனெனில் நமது அன்றாட வாழ்க்கையில் நிகழும் நிகழ்ச்சிகளை நோக்குவோமாயின் வேகத்தைக் கூட்டவும் கழிக்கவும் முடியும் என்று அறிந்திருக்கிறோம். மணிக்கு 100 கிலோ மீட்டர் வேகத்தில் ஒரு புகைவண்டியில் நீங்கள் பிரயாணம் செய்வதாகக் கொள்வோம். நீங்கள் புகைவண்டி செல்லும் திசையிலே 10 கிலோ மீட்டர் வேகத்திலே நடப்பதாகக் கொண்டால், உங்கள் வேகத்தை நிலத்தோடு சார்ந்து கணக்கிட்டால் $100+10=110$ கிலோ மீட்டர் என்று சொல்ல வேண்டியுள்ளது. இதற்கு மாறாகப் புகைவண்டி இயங்கும் திசைக்கு நேர் எதிராக நீங்கள் நடந்தால் உங்கள் வேகம் $100-10=90$ கிலோமீட்டர்களாக அமையும்.

ஆனால், சார்பியல் கொள்கையின்படி ஒளியின் வேகத்தோடு எதனையும் கூட்டவோ கழிக்கவோ இயலாது. இதற்கு எடுத்துக் காட்டாக, ஐன்ஸ்டைன் ஒரு கைகாட்டி விளக்கு ஒளி பரப்புவதைச் சுட்டிக் காட்டியுள்ளார். கைகாட்டியை நோக்கிப் புகைவண்டி செல்வதாகக் கொள்வோம். அதிலிருந்து நோக்குபவருக்கு ஒளியின் வேகம் விநாடிக்கு 3×10^8 மீட்டர்களாகத் தான் அமையும். இதுவல்லாது இயல்பான ஒளியின் வேகத்தோடு புகை வண்டியின் வேகத்தைக் கூட்டி ஒளியின் புதிய வேகம் என்று சொல்ல இயலாது. அதே போன்று புகைவண்டி, கைகாட்டி விளக்கினைவிட்டு விலகிச் செல்லும்போதும் நோக்குபவருக்கு ஒளியின் வேகம் விநாடிக்கு 3×10^8 மீட்டர்களாகத்தான் இருக்கும். ஒளியின் திசை வேகத்தில் மேற்கூறிய மாற்றங்கள் ஏதும் நிகழா. புகைவண்டி வாயு வேகத்திலே கைகாட்டியினை நோக்கியோ அல்லது விலகியோ சென்றாலும் அதனின்று நோக்குவோருக்கு ஒளியின் வேகம் விநாடிக்கு 3×10^8 மீட்டர்கள் தான்.

இக் கருத்தினை உண்மையென ஒப்புக் கொண்டால் மற்றொன்றைப்பற்றியும் சிறிது சிந்திக்க வேண்டும். காலவோட்டமானது திசை வேகத்தின் காரணமாகப் பாதிக்கப்படுகிறது. இக் கருத்தையும் ஐன்ஸ்டைன் அவர்கள் கூறினார்கள். எனவே, காலமும் தனியான ஒன்றில்லை. இக் காலமும் சார்புத் தன்மையுடையதே!

இரண்டு துல்லியமாகக் காலம் காட்டும் கடிகாரங்களை எடுத்துக் கொள்வோம். இவற்றை இரு மேற்கோள் சட்டங்களில் நிலையாக இருப்பதாகக் கொள்வோம். ஒரு சட்டம் மற்றொன்றை நிலையாக வைத்து இயங்கிக் கொண்டிருப்பதாகக் கொள்வோம். இரு கடிகாரங்களும் நிலையாக இருக்கும்போதுப் பல வருடங்களுக்குப் பிறகு ஒரு விநாடிகூட வித்தியாசமின்றிக் காலத்தைக் காட்டும் தன்மையுடையன என்பதை மறந்துவிடக் கூடாது. ஒரு குறிப்பிட்ட கால அளவுக்கு ஒரு கடிகாரம் இயங்கிக் கொண்டிருந்தபின், இரு கடிகாரங்கள் ஒரே கால இடைவெளியைக் காட்டாது. இயங்காமல் நிலையாக இருந்த கடிகாரம் அதிக காலத்தையும், இயங்கிக் கொண்டிருந்த கடிகாரம் குறைந்த காலத்தையும் காட்டும். எடுத்துக்காட்டாக, இரண்டு நபர்களில் ஒருவர் கோயம்புத்தூரிலும் மற்றொருவர் விமானம் மூலம் சென்னையை நோக்கிச் செல்வதாகவும் கொள்வோம். இப் பிரயாணத்திற்கான காலத்தை இருவரும் அளப்பதாகக் கொள்வோம். கோவையில் நிலையாக உள்ள நண்பர் இப் பிரயாணத்திற்கான கால இடைவெளியைத் தமது கடிகாரத்தில் அதிகமாகவும், விமானத்தோடு இயங்கிச் சென்று சென்னையை அடைந்த நண்பர் காலத்தைக் குறைவாகவும் அளப்பார்கள். இரு கடிகாரங்களும் மிகத் துல்லியமாக இசைவுப் பொருத்தம் (synchronisation) உடையன. கடிகாரத்தில் ஏதும் கோளாறுகள் இல்லை. எனவே, கோயம்புத்தூரில் விமான நிலைய நிலத்தின்மீது நின்று பார்க்கும் நண்பருக்கு விமானத்தின் இயக்கம் மிகவும் நிதானமாகத் தோன்றும். ஆதலால், இயங்கிச் செல்லும் தொகுதி அமைப்பில் கால ஓட்டத்தின் வேகம் குறைகிறது என்பது தெளிவாகும்.

ஐன்ஸ்ட்டைனின் சார்பியல் கொள்கையால் பல அறிவியல் கொள்கைகள் சீர்குலைந்து போயின. ஒரு பொருளின் பொருண்மை எப்போதும் மாறாது; அதாவது, அப் பொருள் இயங்கிக் கொண்டிருந்தாலும் நிலையாக இருந்தாலும் அதன் பொருண்மையில் மாறுபாடு ஏதும் இல்லை என்று எண்ணி வந்தனர். ஆனால், இப் புதிய கொள்கையின்படி பொருளின் பொருண்மை அதன் திசை வேகம் அதிகரிக்கப்படுவதற்கேற்ப அதிகரிக்கும் என்பது தெளிவாயிற்று. 50 கிலோ கிராம் எடையுள்ள ஒரு பொருள் விநாடிக்கு ஒளியின் திசை வேகத்தில் பாதி திசை வேகத்தில் (கற்பனை செய்ய இயலாத வேகம்) செல்வதாகக் கொண்டால் அப் பொருளின் எடை 100 கிலோ கிராம் ஆகிவிடும்.

மேற்கூறியவற்றால் நீளம், காலவோட்டம், பொருண்மை ஆகியன வேகத்திற்கேற்ப மாறுபாடு அடைகின்றன என்பது தெளிவாகிறது.

ஒரு பொருள் ஒளியின் வேகத்தோடு இயங்குமானால் (இது முடியாத செயல்) அதன் பொருண்மை எல்லையில்லாது அதிகரித்துக் கொண்டே செல்லும். பொருண்மை ஈறிலி (infinite) ஆகிவிடும். இதைக் கணக்கிட்டுச் சொல்லவும் இயலாத ஒரு நிலையை அடைவோம். ஒரு தண்டானது ஒளியின் வேகத்தோடு இயங்கினால் அதன் நீளம் முழுதும் குறைந்து ஒரு புள்ளியாகிவிடும். இவைகளெல்லாம் கற்பனையில்கூட நிகழாது. எனவே, எல்லையற்ற பொருண்மை அல்லது கற்பனைக்கெட்டாத நீளம் என்பன போன்ற நடைமுறைக்கு ஒவ்வாதவற்றை நீக்கி, ஒரு முடிவினை ஐன்ஸ்ட்டைன் கூறினார். அதன்படி ஒரு பொருள் எவ்வளவு நிறை குறைவாக இருந்தாலும் அப் பொருளை அளப் பரிய உந்து விசையைக் கொண்டும் ஒளியின் வேகத்திற்கு அதிகமான வேகத்தில் இயக்க முடியாது என்று உறுதியாகக் கூறினார்.

மக்கள்வாழ் உலகின் இயற்பியல்பற்றி மிகவும் துணிவோடு கூறப்பட்ட விளக்கமே சார்பியல் கொள்கை எனலாம். இதனைக் கற்றறிந்த பின் சோதனைக்கூடத்தில் ஆய்கருவியின் முன் நின்று பரிசோதனை நிரூபணங்களைக் காண முயற்சி செய்யவும் இயலாது. தினசரி வாழ்க்கையில் அளந்து கணக்கிடக்கூடிய விபரங்களாகச் சார்பியல் தொடர்பான அளவீடுகளைக் கொள்ளவும் இயலாது.

மேற்கூறிய சார்பியல் கொள்கையின் முடிவுகளை மெய்ப் படுத்துவதற்கான பரிசோதனைச் சான்றுகள் பல அணு இயற் பியலில் உள்ளன. கற்பனைக்கெட்டாத திசை வேகங்களில் இயங்கும் பல துகள்கள் உள்ளன. சில அணுக்களும் துகள்களும் ஒளியின் வேகத்திற்கு மிக ஒப்பான வேகத்திலே பறக்கின்றன. அத் துகள்களில் மின்னூட்டம் கொண்டனவும் உள்ளன. அவைகள் பல்வேறு திசை வேகத்திலும் மாறுபட்ட பொருண்மையுடனும் இயங்குவதைக் கண்டுள்ளனர்.

சிறப்புச் சார்பியல் கொள்கையின் கருத்துப்படி ஒரு துகள் அல்லது பொருளின் பொருண்மை அதன் திசை வேகத்திற்கேற்ப மாறுபாடு அடையும். இதற்கான ஒரு சமன்பாட்டையும் இக்கொள்கையில் காணலாம். எலெக்ட்ரான் நிலையாக இருக்கும் போது அதன் பொருண்மையைக் கண்டனர். அதனை மிகுந்த

திசை வேகத்தில் இயங்குமாறு செய்து அதன் பொருண்மையினைக் கண்டனர். இந்த எலெக்ட்ரான்களின் பொருண்மை அதிகரித்ததை மேற்கூறிய சமன்பாட்டின்படி கணக்கிட்டார்கள். இதன் பயனாக, பொருண்மை மாறுபாட்டிற்குத் திசை வேகமே காரணம் என்று தெளிவாகச் சொல்லலாம். இப் பரிசோதனையே சார்பியல் கொள்கைக்குச் சான்றாக, பரிசோதனை நிரூபணமாக அமைந்து விட்டது.

மற்றொரு சோதனை H. E. ஐவ்ஸ் என்பாரால் செய்யப் பட்டது. ஒவ்வோர் அணுவும் அதன் தனித் தன்மைக்கேற்ப ஊசலாடிக் (அதிர்ந்து) கொண்டேயிருக்கும். அணு ஊசலாடும் வேகத்தைப் பயன்படுத்திக் காலத்தைத் துல்லியமாக அளக்கலாம். ஐவ்ஸ் என்பார் ஹைட்ரஜன் அணுக்களை விநாடிக்கு 1,100 மைல் வேகத்தில் இயங்க வைக்கும் ஆற்றல் படைத்த கருவியினைப் படைத்தார். இவ் வேகத்தை ஒளியின், விநாடிக்கு 186,000 மைல்கள் என்ற வேகத்தோடு ஒப்பு நோக்கும்போது மிகவும் குறைவானது ஆகும். வேகத்தின் விளைவாகக் கால ஓட்டம் குறைவுபடுவதாக உள்ளதா என்பதைக் கண்டுபிடிக்க இக் கருவி மிகவும் பயன்பட்டது. அணுக்களின் அதிர்வு-வேகம் அணு இயங்கும் வேகத்திற்கேற்ப மாறுபடுகிறது என்பதை ஐவ்ஸ் கண்டறிந்தார். இயங்காது நிலையாக இருக்கும் அணுவின் ஊசலாடும் வேகம் அதிகமாகவும், அணுக்கள் வேகமாக இயங்கும்போது ஊசலாடும் வேகம் குறைந்தும் விடுகின்றது என்பதும் தெளிவாகியுள்ளது.

இவை எல்லாவற்றையும்விடச் சார்பியல் கொள்கையில் இன்னொரு சிறப்பான விதியையும் ஐன்ஸ்டைன் படைத்தார். இதனை ஐன்ஸ்டைனின், 'பொருண்மை-ஆற்றல் தொடர்பு' என்பர். $E=mc^2$ என்பதுதான் அத் தொடர்பு. E என்பது இயங்கும் பொருளின் மொத்த ஆற்றலையும், m என்பது அதன் பயனுறு பொருண்மையினையும் (effective mass), c என்பது ஒளியின் வேகத்தையும் குறிக்கும். ஒரு பொருளின் பொருண்மை அதன் இயங்கும் தன்மைக்கேற்ப அதிகரிக்கிறது. இயங்கும் பொருள் இயக்க ஆற்றலைக் கொண்டுள்ளது. பொருள் இயங்குவதால் இதற்கு இயக்கு ஆற்றல் கைவரப்பட்டது. அதிக ஆற்றல் பெறக் காரணமாக அமைவது பெருகி வரும் பொருண்மையே என்று கூறலாம். எனவே, ஆற்றலுக்குப் பொருண்மை உண்டு; பொருண்மைக்கும் ஆற்றல் உண்டு. மிகப் பழைய கொள்கைப் படி பொருண்மை வேறு ஆற்றல் வேறு ஆகும். ஆனால், தற்போது சார்பியல் கொள்கைப்படிப் பொருண்மையை ஆற்ற

லாகவும், ஆற்றலைப் பொருண்மையாகவும் காணலாம் என்பது தெளிவாகிறது. இந் நாளில் $E = mc^2$ என்ற தொடர்பு மிக்கப் புகழ் பெற்றது. இதன் சிறப்பினை விளக்க ஓர் எடுத்துக் காட்டினைப் பார்ப்போம். நாட்டையே அழிக்கவல்ல ஆற்றல் மிகு அணுகுண்டு தோன்றுவதற்கு அடிப்படையாக விளங்கியதே இச் சமன் தொடர்தான்! அணுகுண்டின் மொத்தப் பொருண்மையில் ஒரு விழுக்காட்டில் பத்திலொரு பாகத்தையே ஆற்றலாக மாற்றுகிறது. நாம் ஒரு ராத்தல் எடையுள்ள நிலக்கரியை முழுவதும் ஆற்றலாக மாற்றும் திறன் படைத்திருந்தால் நம் நாட்டிற்கு ஒரு மாதத்திற்குத் தேவையான மின் ஆற்றலை அதிலிருந்து பெற முடியும். பொருண்மை அழிந்து ஆற்றலாக வடிவெடுப்பதுதான் இதற்கெல்லாம் காரணமாகும். இத் தொடர்பின் சிறப்பை உலகே அறிந்து பல துறைகளிலும் தற்போது பயன்படுத்தி வருகின்றது.

ஐன்ஸ்ட்டைன் 1916ஆம் ஆண்டில் பொதுச் சார்பியல் கொள்கையினை வெளியிட்டார். சிறப்புச் சார்பியல் கொள்கையில் சீரான திசை வேகத்தோடு இயங்கும் தன்மை கொண்ட இரு தொகுதிகளின் இயக்கம் பற்றி விரிவாக விளக்கியுள்ளார். அதாவது, சீராக நேர்கோட்டில் இயங்கும் சமத்துவத் தொகுதிகளைப் (inertial systems) பற்றி விளக்குகிறது. எல்லாவிதமான தொகுதிகளுக்கும், குறிப்பாக முடுக்க திசை வேகங் கொண்ட தொகுதிகளுக்கும்(accelerated systems)சார்பியல் கொள்கைதனை விரிவுபடுத்த எண்ணினர். மேலும், குறிப்பாக ஒரு சிறப்பு வகை முடுக்கம் கொண்ட புவியீர்ப்புத் தொடர்பான தோற்றப் பாட்டிற்குச் (gravitation) சார்பியலை விரிவுபடுத்தினர்.

ஐன்ஸ்ட்டைன் 1915-ல் தமது சிறப்புச் சார்பியல் கொள்கையைச் சீரற்ற திசை வேகமுள்ள இயக்கங்களை விளக்கும் பொருட்டு விரிவாக்கினர். இதுவே 'பொதுச் சார்பியல் கொள்கை'யாகும். பூமி, சூரியன் இன்னும் பிற கோள்களின் சிக்கல்மிகு இயக்கங்களையும் இக் கொள்கை விளக்குவதாக அமைந்துள்ளது. மிகப் பழைய கொள்கைகளின் அடிப்படையில் நியூட்டனின் புவிஈர்ப்பு விதிகள் அமைந்துள்ளன. ஐன்ஸ்ட்டைன் ஈர்ப்பு விதியை மேலும் சீரானதாகவும் சிறப்பு மிக்கதாகவும் மாற்றியமைத்தார். பொதுச் சார்பியல் கொள்கையின் வெற்றி ஈர்ப்பு விதிபற்றிய மதிநுட்பமிகு விளக்கங்களைத் தந்ததால் அமைவதொன்றாகும்.

மிகுந்த விரிவான விளக்கத்தோடு இக் கொள்கை ஈண்டு கொடுக்கப்படவில்லை. சில சீரிய கணிதவியலில்

குறிப்பாக டென்சார் கால்குலஸ் (Tensor Calculus) பற்றி அறிவு அடிப்படையிலேதான் இப் பொதுச்சார்பியலை நன்கு கற்றறிந்து கொள்ள இயலும். எனவே, பொதுச் சார்பியலில் சில பண்பு ரீதியான விளக்கங்களை மட்டும் காண்பதோடு அமைவு பெறுவோம். இக் கொள்கைக்குப் பரிசோதனை நிரூபணமாக அமையும் சில சோதனைகளை மட்டும் காணலாம்.

1-2. ஒளியின் திசை வேகம் (Velocity of Light)

சார்பியல் கோட்பாட்டிற்கு ஆணி வேராகவும் அடிப்படையாகவும் விளங்குவது ஒளியின் திசை வேகமாகும். ஒளியின் திசை வேகம்பற்றிய கருத்து இல்லாமல் சார்பியல் கொள்கையே இல்லை என்று கூறலாம். எனவே, சார்பியல் கொள்கைக்கு அடித்தளமாக விளங்கும் இரண்டு தற்கோள்களில் ஒளியின் திசை வேகத்தைப்பற்றிய கருத்தினைப் புகுத்தியுள்ளனர்.

இத்தகைய அடிப்படைக் கருத்தினைப்பற்றிச் சிறிது விளக்கமாகக் காண்பது மிகவும் நன்று. ஒளியின் திசை வேகத்தின் சிறப்புத் தன்மைகள் பற்றியும் நாம் அறிய வேண்டியது இன்றியமையாதது. எனவே, ஒளியின் திசை வேகத்தின் சில சிறப்புப் பண்புகளை இங்கு ஆராய்வோம்.

ஒளியின் திசை வேகத்தின் சிறப்புப் பண்புகள் : ஒளியின் திசை வேகம் c என்று குறிக்கப்படுகிறது; துல்லியமான மதிப்பு என்று ஏற்றுக் கொள்ளப்பட்டது. அதன் அளவு $c = 2{\cdot}997928 \times 10^{10}$ செ.மீ. / விநாடி. இது இயற்பியலில் முக்கியத்துவமும் சிறப்பும் வாய்ந்த மாறா எண் அல்லது மா... ஆகும்.

இதற்கு இத்தகைய முக்கியத்துவமும் சிறப்பும் பல காரணங்கள் உண்டு. அவை பின்வருமாறு :

(1) ஒளியின் திசை வேகம் எதையும் சார்ந்து இருப்பதில்லை. குறிப்பாக நாம் எங்கிருந்து அல்லது எந்த ஒரு மேற்கோள் சட்டத்திலிருந்து (reference frame) நோக்கினும் அதன் திசை வேகம் மாறாமல் இருக்கிறது.

(2) உலகின்கண் உள்ள அனைத்துவகை மின் காந்தக் கதிர்களும், மிகப் பெரிய ரேடியோ அலைகள் முதல் மிகச் சிறிய

நுண்ணலைகள் வரை ஒரே திசை வேகமாகிய ஒளியின் திசை வேகத்திலே பரவுகின்றன. c-ன் அளவு கதிர்களை வெளிவிடும் மூலத்தின் அதிர்வெண்ணைப் (frequency) பொறுத்தது அன்று.

(3) எந்த ஒரு சைகையும் (signal) ஒளியின் திசை வேகத்திற்குக் கூடுதலான திசை வேகத்தோடு செலுத்த இயலாது. எந்தவொரு துகளையும் (particle) சைகையையும் (signal) c-ன் மதிப்பிற்கு மேலான திசை வேகத்தோடு செலுத்த இயலாது. ஆகவே, துகள்களுக்கும் சைகைகளுக்கும் (signal) செய்வதற்கு உச்சவரம்பாக இவ்வொளியின் திசை வேகம் விளங்குகிறது.

(4) மேக்ஸ்வெல்லின் (Maxwell's) மின்காந்தப் புலன் தொடர்புள்ள சமன்பாடுகளில் ஒளியின் திசை வேகம் சிறப்பானதும் தனித் தன்மையும் கொண்டு பங்கேற்றுள்ளது.

(5) லோரண்ட்ஸ் விசை (Lorentz force) கணக்கீட்டிலும், ஒளியின் திசை வேகம் பங்கேற்கிறது. லோரண்ட்ஸ் விசை = காந்த விசை + நிலை மின் விசை (electrostatic force).

(6) சார்பியல் கொள்கையின் சிறப்பான சமன்பாடுகளிலும் தொடர்புகளிலும் இம் மாறு எண் C பயன்படுகின்றது. எடுத்துக்காட்டாக:

(i) பொருளின் திசை வேகத்தையும், அதன்பொருண்மையில் ஏற்படுகின்ற மாற்றத்தையும் எடுத்துக்காட்டும் சமன்பாடு.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

ii) பொருண்மைக்கும் ஆற்றலுக்கும் உள்ள தொடர்பு சித்திரிக்கும் பெருமைமிகு 'ஐன்ஸ்ட்டைனின் பொருண்மை ஆற்றல் சமன்பாடு'

$$E = mc^2$$

பொருண்மையை ஆற்றலோடு சமப்படுத்தியும் தொடர்பு செய்தும் காட்டும் திறன் ஒளியின் திசை வேகத்திற்கு உண்டு என்பதை மேலேயுள்ள சமன்பாடு விளக்குவதாக அமையும்.

(7) இயற்பியலில் இரண்டு சிறப்பான அலகுகள் உண்டு: (i) மின்காந்த அலகு (electromagnetic unit); (ii) நிலைமின் அலகு

(electrostatic unit). இவையிரண்டிற்கும் உள்ள தொடர்பினை விளக்க ஒளியின் திசை வேகம் பயன்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) 1 மின்காந்த அலகு —மின்னூட்டம் (charge)
= c நிலை மின்னியல் அலகு—மின்னூட்டம் (charge).

(ii) 1 மின்காந்த அலகு—மின்தேக்கம் (capacity)
c^2 நிலை மின்னியல்—மின்தேக்கம் (capacity)

(8) தலைகீழ் நுண்ணமைப்பு மாறு எண்ணில்கூட (reciprocal of fine structure constant) ஒளியின் திசை வேகம் (c) தொடர்பு கொண்டுள்ளது.

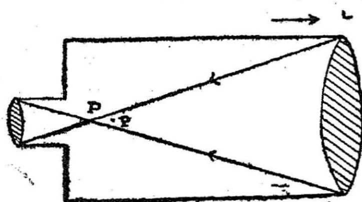
$$\frac{h}{2\pi} \cdot \frac{c}{e^2} = 137{\cdot}04$$

இங்கு h என்பது பிளாங்கின் மாறு எண். e என்பது புரோட்டானின் மின்னூட்டம் (charge) ஆகும்.

மேற்கூறிய சிறப்பு வாய்ந்த ஒளியின் திசை வேகம் சார்பியலோடு எங்ஙனம் தொடர்பு கொண்டுள்ளது என்று இனி காண்போம்.

ஒளி பரவுதலும் சார்பியலும் : ஒளியின் அலைக் கொள்கை (Wave Theory) சரியானது என்று ஏற்றுக்கொண்டால் பொருள்களின் இயக்கத்திலே ஒரு பிரச்சினை உருவெடுப்பதாக உள்ளது. அலைக் கொள்கைப்படி ஒளி மூலம், ஊடகம், நோக்குநர் அல்லது ஒளியை ஏற்பி என்பன உள்ளன. இங்கு அலைகளுக்கென்று ஊடகத்தைச் சார்ந்த சிறப்புத் திசைவேகம் ஒன்று உண்டு என்பது அலைக்கொள்கையின் அடிப்படை தற்கோளாக அமைந்துள்ளது. இத் திசை வேகம் மூலம் மற்றும் பெறுநர் அல்லது நோக்குநர் ஆகியவற்றின் இயக்கத்தைப் பொறுத்தது அன்று. மேற்கூறிய தற்கோள் நீரின் மேல் பரப்பில் தோன்றும் நீரலைகளுக்கும், காற்றில் பரவும் ஒலி அலைகளுக்கும், கம்பிகளிலும் நூல்களிலும் பரவும் அலைகளுக்கும் சிறப்பாகப் பொருந்துகிறது. மேற் கூறியன யாவும் விசையியல் அலைகளாகும் (Mechanical Waves). இவ்வுண்மை ஒளி அலைகளுக்கும் பொருந்துமா?

இதற்கு விளக்கம் தருவதாக அமையும் ஓர் எளிய எடுத்துக் காட்டினைப் பார்ப்போம். ஒரு விண்மீனிடமிருந்து பரவிய ஒளி அலைகள் படத்தில் காட்டியபடி ஒரு தொலைநோக்கியை அடைவதாகக் கொள்வோம். தொலைநோக்கி, ஈதரைச் சார்ந்து நிலையாக இருப்பதாகக் கொண்டால், வெளியிலிருந்து வரும் அலைகள் தொலைநோக்கியினுள் P என்ற புள்ளியில் குறுக்குக் கம்பிகள் உள்ள இடத்தில் பிம்பத்தை உண்டாக்குவதாகக் கொள்வோம். தொலைநோக்கியானது



படம் 1. ஈதரில் தொலைநோக்கியின் இயக்கத்தினால் ஏற்படும் விளைவு

இடப்புறமாக அம்புக் குறியிட்ட திசையிலே இயங்குவதாகக் கொள்வோம். இந்நிலையிலே வில்லையினூடே (L) பாயும் ஒளி அலைகள் LP என்ற தூரத்திலே வந்து குவிகின்றன. ஆனால், ஒளி அலைகள் வில்லையிலிருந்து (L), P என்ற புள்ளியை அடையும்போது குறுக்குக் கம்பிகள் தொலைநோக்கியின் இயக்கத்தால் P′ என்ற புள்ளியை வந்தடைந்துவிடும்.

$$P'L = \left(1 - \frac{v}{c}\right) \mathrm{PL} = (1-\beta)\ PL$$

இங்கு β வின் மதிப்பு $= v/c$. இத்தகைய ஒரு விளைவு அரகோ (Arago) என்பவரால் பல காலங்களுக்கு முன்பே எதிர்பார்க்கப் பட்டது. ஆனால், இவ் விளைவினைக் காட்சிப் பதிவு செய்யவில்லை. $\frac{v}{c}$-யின் மதிப்பில் முதல் அடுக்கு அல்லது மடியில் உள்ள வேறுபாட்டின் காரணமாக இத்தகைய பல முடிவுகள் எதிர்பார்க்கப் பட்டன. இவையும் காட்சிப்பதிவாக்கப்படவில்லை. இத்தகைய எதிர் முடிவுகள் 1818ஆம் ஆண்டிலே ஃப்ரனலின் சிந்தனையைத் தூண்டின. அதன் பயனாகத் தொலைநோக்கியில் உள்ள வில்லை போன்ற ஓர் ஊடகத்தைப் போன்றதொரு பருப்பொருள் ஊடகம் ஒன்று உள்ளதென்று எடுத்தியம்பினார். இப் பருப்பொருள் தன்னோடு ஈதரையும் இழுத்துச் செல்கிறது என்றார். அவ் விழுவையின்

$$\text{அளவு} = \left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right) V$$

இங்கு μ என்பது பருப்பொருள் ஊடகத்தின் ஒளி விலகல் எண் ஆகும். இதனை 'ஈதர் இழுவை' (ether drag) என்பர். ஈதரைச் சார்ந்த இயக்கத்தின் விளைவாகத் தோன்றும் முதல் மடி விளைவுகள் இல்லாமல் இருப்பதனை ஈதர் இழுவை நன்கு

விளக்குவதாக உள்ளது. இவ்வுண்மைக்குச் சோதனை நிரூபணம் 1851ஆம் ஆண்டில் கிடைத்தது. பிஷூவா என்பார் ஒரு நேரடிச் சோதனையைச் செய்தார். அச் சோதனையில் நீர் பாயும்போது ஒளி அலைகளையும் தன்னுடன் இழுத்துச் செல்கிறது. ஃப்ரனலின் கொள்கையின் கூற்றுப்படி உள்ள அளவிலேயும் இழுவை நிகழ்ந்தது. மேலும் 1895ஆம் ஆண்டிலே லோரண்ட்ஸ் என்பார் இயங்கும் ஊடகங்களுக்கான மின்காந்தக் கொள்கையினைப் (electromagnetic theory) படைத்தார். இதற்கு ஈதர் நிலையாகவுள்ளது என்ற தற்கோளை அடிப்படையாகவும் கொண்டார். இக்கொள்கையும் ஒளி இழுவைக்கான ஃப்ரனலின் சூத்திரத்தைச் சரியானதென்று ஒரு முடிவுக்கு நம்மைக் கொண்டு சேர்ப்பதாக அமைந்தது.

ஃப்ரனல், லோரண்ட்ஸ் ஆகியோர் உறுதியோடு ஒளித் தோற்றப் பாட்டிலே எந்த ஒரு விளைவும் இருக்க வழியில்லை என்றனர். விளைவு ஈதரைச் சார்ந்த ஆய்கருவியின் திசைவேகத்தின் முதல் மடியைப் பொருத்ததாகும். ஆனாலும், இரண்டாம் மடியின் பயனாக விளைவுகள் ஏதும் இருக்க வாய்ப்புள்ளன, என்றும் சொன்னார்கள். புவியின் சுற்றுப் பாதை திசைவேகம் $\sim 10^{-4}c$ ஆக இருப்பதால் இரண்டாம் மடி விளைவுகளின் அளவு $\sim 10^{-8}$ என்பதின் பகுதியாகவே இருக்கும் என்றனர். இவை மீச்சிறிய அளவு. இதனை அளந்தறியும் ஆய்கருவி மிக நுட்பமுடையதாக இருக்க வேண்டும். இந்த நிலையில் மைக்கல்சன் தமது புகழ்மிகு குறுக்கீட்டு விளைவுமானியைப் (Interferometer) படைத்தார். 1887ஆம் ஆண்டிலே மார்லி என்பாருடன் இணைந்து புகழ்மிகு பரிசோதனையைச் செய்தார். இச்சோதனையில் இரண்டாம் மடி விளைவுகள் ஏதேனும் இருப்பின் அதனை உறுதியாக இக் குறுக்கீட்டு விளைவு கண்டறியக்கூடிய புலமையுடையதாகும். இதன் நுட்பத்திற்கும், துல்லியமாக அளக்கும் திறனுக்கும் நிகராக எதையும் சொல்ல இயலாது.

ஒளியின் புவியைச் சார்ந்த வேகம்

இந்நூற்றாண்டின் தொடக்கத்திலே ஒளியின் வேகத்தைக் கண்டறிய நவீன நுணுக்கங்களைப் பயன்படுத்தினர். அதன் பயனாக ஒரு பண்பட்ட வினா எழுப்பினர். 'ஒளியின் வேகத்தை அளந்தறியும்போது எந்த மேற்கோள் தொகுதியை அல்லது ஆயச் சட்டத்தை அமைத்து அதனைச் சார்புபடுத்தி ஒளியின் வேகமானது அளக்கப்படுகிறது?' என்பதே அவ்வினா. ஒளியின்

வேகத்தை அளக்கும்போது புவியையோ அல்லது விண்மீன் களையோ அல்லது ஏதாவதொரு நிலையான ஊடகத்தையோ சார்பாக வைத்துக்கொள்கிறோம். எனவே, ஒலி பரவ எங்ஙனம் காற்று இருக்கிறதோ அவ்வாறே ஒளி பரவ மேற் கூறியவற்றில் எதனை ஊடகமாகக் கொள்வது என்பது பிரச்சினையாக அமைகிறது.

காற்றை ஊடகமாகக் கொண்டு ஒலி பரவுகிறது என்பது நாமறிந்த உண்மை. எனவே, ஒலியின் வேகத்தை அளக்கும் போது அதனைக் காற்றோடு சார்பு செய்து அளந்தறிகிறோம். நாம் ஒலியின் புவி சார்ந்த சார்பு வேகத்தைக் கணக்கிட்டறியலாம். ஒலியின் காற்றைச் சார்ந்த வேகம் நமக்குத் தெரியும். காற்றின் புவியைச் சார்ந்த வேகத்தைக் கொண்டும் கெலிலியன் மாற்றுச் சமன்பாடுகளைக் கொண்டும் ஒலியின் புவி சார்ந்த வேகத்தைக் கண்டறியலாம். காற்றின் புவி சார்ந்த வேகத்தை u எனக் கொள்வோம். இதன் பரப்பு திசை ஒளியின் பரவு திசைக்கு எதிராக இருப்பதாகக் கொள்வோம். ஒளியின் புவி சார்ந்த வேகம் = ஒலியின் காற்று சார்ந்த வேகம் + காற்றின் புவி சார்ந்த வேகம் (u) என்பதாக அமையும். ஒளிக்கு ஏற்ப ஒருவித கற்பித ஊடகத்தைக் (hypothetical medium) கற்பித்தார்கள். அதனை ஈதர் என்றழைத்தனர். இந்த ஈதர் எல்லா இடங்களிலும் பரவியுள்ளது பொருட்களையும் ஊடுருவிச் செல்வது; நிலையானது; கண்ணால் காண இயலாதது. ஈதரில் ஒளி தங்குதடையின்றி ஊடுருவிப் பாயக் கூடியது. பருப் பொருள்கள் கூட இதனூடே பாயும்போது எதிர்ப்பு உணர்வு ஒன்றும் உண்டாவதில்லை. புவி தனது சுற்றுப் பாதையில் விநாடிக்கு 3×10^4 மீட்டர்கள் வீதம் இயங்கி வருகிறது. எனவே கெலிலியன் மாற்றத்தின்படி ஒளியின் திசை வேகமானது ஊடகத்தில் மிதக்கும் புவியின் இயங்கும் திசையைப் பொருத்தே அமையும். மேலும், தற்கோளின்படி ஈதர் வெளியிலே நிலையாக வுள்ளது என்பது பெறப்படுகிறது. எனவே, நிலையாக உள்ள ஒன்றினைக் கொண்டு அதனூடே இயங்கும் ஒரு பொருளின் சார்பிலா வேகத்தைக் (absolute velocity) கண்டறிய முடியும், என எண்ணினர். ஒளியின் சார்பிலா திசை வேகத்தை நிலையான ஈதர் என்ற ஊடகத்தில் கண்டறிய இயற்பியல் வல்லுநர் பலர் முயன்றனர். குறிப்பாக, பிஷோ (Fizeau), மைக்கல்சன், மார்லி முதலியோர் முயன்றனர். ஆனால் இவர்களுக்கு இம் முயற்சியில் வெற்றி காண இயலவில்லை. பின்னர். ஹெர்ட்ஸ் (Hertz) என்பார் ஈதர் நிலையானதல்ல என்றார். ஈதர், அதனூடே பாயும் பொருள்களினால் அவற்றின்

வேகத்தோடு இழுத்துச் செல்லப்படுகிறது என்றும் கூறினர். எனவே, ஈதரின் திசை வேகமும் அதனுள் பாயும் பொருளின் திசை வேகமும் ஒன்றேயாகும். இந்த தற்கோளானது பிறழ்ச்சித் தோற்றப் பாட்டினை (Phenomenon of aberration) சரியாக விளக்குவதாக அமையவில்லை. எனவே இத்தற்கோளும் சரியானதல்ல என்று எண்ணிப் புறக்கணிக்கப்பட்டது.

பின்னர் பிஷூ (Fizeau). ஃப்ரனல் (Fresnel) ஆகியோர் ஈதர் முழுமையாக பொருள்களினால் எடுத்துச் செல்லப்பட வில்லையென்றும், அதன் ஒரு பகுதிதான் இழுத்துச் செல்லப் படுகிறது என்றும் கண்டனர். எனவே ஈதரினூடே பாயும் பொருள் ஈதரின் ஒரு பகுதியைத் தன்னோடு இழுத்துச் செல்லும் என்பதைப் பெறலாம். இதனைத் தற்கோளாகக் கொண்டு ஃப்ரனல் கொள்கையளவிலே ஈதரின் ஒரு பகுதி இழுவைக் கான ஒரு கோவையைச் சமைத்தார். அதற்கு 'ஃப்ரனலின் ஈதர் இழுவை எண்' எனப் பெயரிட்டனர்.

ஃப்ரனலின் ஈதர் இழுவை எண்

t என்ற அளவு தடிப்புக் கொண்டதும், μ என்ற அளவு விலகலெண் கொண்டதுமாகிய ஓர் ஊடகத்தை ஒரு கட்டியின் வடிவிலே எடுத்துக் கொள்வோம். இக்கட்டியினை ஓர் அறையிலே ஒரு மேசை மீது வைப்பதாகக் கொள்வோம். இக்கட்டியின் மீது ஓர் ஒளிக் கற்றை செங்குத்தாக விழுவதாகக் கொள்வோம். பூமி இயங்கிக் கொண்டிருக்கிறது. எனவே அவ்வூடகமும் இயங்கிக் கொண்டிருக்கிறது. மேலும் அறை நிலையானதாகக் கருதப்பட்டுள்ளது. வெளி ஈதரால் நிரப்பப் பட்டுள்ளது. எனவே அவ்வூடகக் கட்டியும் ஈதரில் இருப்பதாக அமைகிறது. ஈதரின் ஒரு பகுதி இழுவைக்குட்பட்டுள்ளது என்பதை ஃப்ரனல் தற்கோளாகவும் கொண்டுள்ளார். எனவே காற்றில் ஒளியின் திசை வேகத்திற்கு நேர் எதிரான திசை வேகக் கூறு $= v$ மற்றும் ஊடகத்திலே fv எனவும் அமையும். இங்கு f என்பது ஒரு தகுந்த பின்னமாகும். மற்றும் v என்பது புவியின் திசை வேகமாகும். c என்பதை ஒளியின் காற்றிலுள்ள ஈதரைச் சார்ந்த திசை வேகமாகக் கொள்ளலாம்.

எனவே ஒளியின் ஊடகத்திலுள்ள ஈதரைச் சார்ந்த திசை வேகம் $= \frac{c}{\mu}$ எனக் கொள்ளலாம்.

எனவே காற்றில் ஒளியின் ஈதரைச் சார்ந்த திசை வேகம் = $c+v$. எனவே ஊடகத்தில் ஒளியின் திசை வேகம் $= \frac{c}{\mu} + fv$ 't' என்ற தடிப்புள்ள ஊடகத்தை ஊடுருவிச் செல்ல எடுத்துக் கொண்ட காலம் $= \dfrac{t}{\frac{c}{\mu}+fv}$

(fன் மதிப்பு 0க்கும் 1க்கும் இடையில் இருப்பதாக உள்ளது.)

ஒளி t என்ற தடிப்புள்ள காற்றினை ஊடுருவிச் செல்ல எடுத்துக் கொண்ட காலம் $= \dfrac{t}{c+v}$

மேற்கூறியவற்றிலிருந்து ஒளி இரு ஊடகங்களில் (கண்ணுடி, காற்று) சமதூரம் செல்வதில் உள்ள கால வேறுபாடு $= \dfrac{t}{\frac{c}{\mu}+fv} - \dfrac{t}{c+v}$

$$= t\left(\frac{c}{\mu}+fv\right)^{-1} - t(c+v)^{-1}$$

$$= t\,\frac{\mu}{c}\left(1+\frac{fv\mu}{c}\right)^{-1} - \frac{t}{c}\left(1+\frac{v}{c}\right)^{-1}$$

$$= \frac{t}{c}\left[\mu\left(1-\frac{fv\mu}{c}+\frac{f^2v^2\mu^2}{c^2}+\dots\right)\right.$$

$$\left. -\left(1-\frac{v}{c}+\frac{v^2}{c^2}+\dots\right)\right]$$

$$= \frac{t}{c}\left[(\mu-1) - \frac{v}{c}(f\mu^2-1)+\dots\right] - \qquad \dots\dots(1)$$

ஈருறுப்புத் தேற்றத்தின்படி (binomial theorem) விரித்து பின்னர் $\frac{v}{c}$-யின் உயர் மடிகளைப் புறக்கணித்த பின் சமன்பாடு (1)ஐப் பெறலாம்.

மேற்கூறிய ஊடகக் கட்டியை பல திசை கோட் சேர்க்கை களில் (orientations) அமைத்து, இவற்றின் ஒளி ஊடுருவிச் செல்ல எடுத்துக் கொண்ட கால அளவிலே ஏற்படுகின்ற மாற்றத்தைக் கொண்டு v யின் மதிப்பினைக் கண்டறியலாம். ஆனால், இக்கால வேறுபாடு பல திசை கோட் சேர்க்கை

களின் அமைப்பிலும் ஒன்றாக இருக்கக் கண்டனர். ஆகவே சமன்பாடு (1) ஐ கீழ்க் கண்ட வரையறுக்கு

$\frac{v}{c}$ $(f\mu^2-1=0$ அல்லது

$$f = \frac{1}{\mu^2} \quad \because \quad \frac{v}{c} \neq 0 \qquad \text{......(2)}$$

உட்பட்டால்தான் சரியானதென்று ஏற்றுக் கொள்ளலாம். ஒளி இரு ஊடகங்களிலும். (கண்ணாடி, காற்று) சமதூரம் செல்லு

வதில் உள்ள கால வேறுபாடு $= \frac{t}{c}(\mu-1)$ ......(3)

இத்தொடர்பில் v ஐக் காணவில்லை. எனவே புவியின் திசைவேகத்தை இத்தொடர்பினைக் கொண்டு கண்க்கிட்டறிய இயலாது.

இப்போது ஊடகக் கட்டியானது u என்ற அறையினைச் சார்ந்த திசை வேகத்திலே v யின் திசையிலே இயங்குவதாகக் கொள்வோம், v என்பது புவியின் திசை வேகம் அல்லது புவியின் மீதுள்ள ஊடகக் கட்டியின் திசை வேகமாகும். இப்போது ஊடகக் கட்டியின் நிலையான ஈதரைச் சார்ந்த திசை வேகம் $= u+v$ ஆகும். எனவே ஊடகக் கட்டியினூடே ஊடகத்தைச் சார்ந்த ஈதர் ஓட்டத்தின் திசை வேகம் $= f(u+v)$. ஆனால் ஒளியின் திசைக்கு நேர் எதிராக, ஊடகக் கட்டி u என்ற திசை வேகத்தில் இயங்கிக்கொண்டிருக்கிறது. எனவே அறையைச் சார்ந்த ஊடகத்தினூடே ஈதர் ஓட்டத்தின் திசை வேகம் $= f(u+v) - u = v + fv\,(f-1)$ அறையானது நிலையான தொன்றாகக் கொள்ளப்பட்டது. மேலும் ஒளியின் ஈதரைச்

சார்ந்து ஊடகத்தினூடே திசை வேகம் $= \frac{c}{\mu}$ ஆகும். $\because \mu$

ஆனது ஊடகத்தின் இயக்கத்தைப் பொறுத்தது அன்று.

எனவே அறையைச் சார்ந்த ஒளியின் திசைவேகம்

$$= \frac{c}{\mu} + fv + u(f-1) \qquad \text{......(4)}$$

ஊடகம் நிலையாக இருப்பின் $u=0$, இப்போது ஒளியின் அறையைச் சார்ந்த திசை வேகம்

$$= \frac{c}{\mu} + fv \qquad \text{......(5)}$$

எனவே ஊடகத்தின் இயக்கமானது, ஒளியின் வெற்றிடத்தைச் சார்ந்த திசை வேகத்தினை கீழ்க் கண்ட அளவு அதிகப் படுத்துவதாக அமைகிறது.

$$= \frac{c}{\mu} + f v + u(f-1) - \left(\frac{c}{\mu} + f v \right)$$

$$= u\ (f-1)$$

u என்பது ஊடகம் இயங்கும் திசை வேகமாகும்.

இப்போது ஊடகமானது u என்ற திசை வேகத்திலே ஒளியின் திசைக்கு நேர் எதிராக இயங்குவதால், அதாவது வெற்றிடத்தைச் சார்ந்த திசை வேகம் $= -u$ ஆகும். ஒளியின் திசையை $(+)$ ஆகக் கொண்டால் ஈதர் இழுவை எண்

$$= \frac{u(f-1)}{-v} = 1-f$$

$$= 1-f \qquad \ldots\ldots(6)$$

சமன்பாடு எண் (2)ல் இருந்து 'f'யின் மதிப்பினை சமன்பாடு (5)ல் பதிலீடாக்கினால் ஈதர் இழுவை எண்

$$= 1 - \frac{1}{\mu^2} \qquad \ldots\ldots(7)$$

இதுதான் ஃப்ரனலின் ஈதர் இழுவைக்கான சூத்திரமாக அமைகிறது.

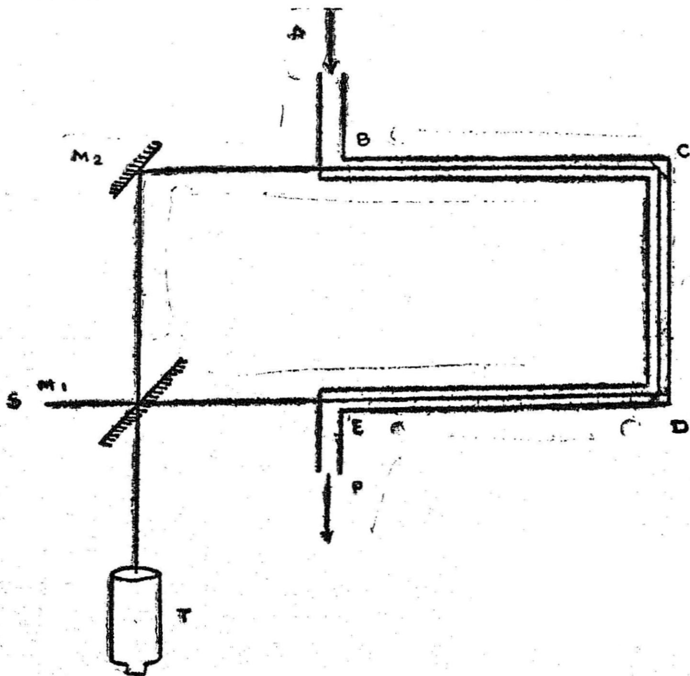
மேற்கூறியவற்றால் கீழ்க்கண்ட முடிவுகள் தெளிவாகின்றன. ஒரு பருப்பொருள் u என்ற திசை வேகத்திலே ஈதரினுள்ளே இயங்கினால், ஈதரின் திசை வேகம் u மற்றும் $\left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right)$ ஆகியவற்றின் பெருக்கற் பலனாக அமையும். அதாவது ஈதரின் திசை வேகம் அல்லது ஈதர் இழுவை எண் $= u\left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right)$ ஆகும்.

மேற்கூறிய கோவையில் μ என்ற ஊடகத்தின் மாறு எண் இருந்தாலும் மேலும் இதன் மதிப்பு ஒளியின் அதிர்வெண்ணைப் பொருத்து அமைவதாலும் ஈதர் இழுவையானது. ஒளியின் அதிர் வெண்ணைப் பொருத்து அமைகிறது என்பது பெறப்படுகிறது. இதன் காரணமாக ஃப்ரனலின் சூத்திரத்தில் பெரிய இடர் பாடுகள் உள்ளன என்றனர். மேற்கூறிய கருத்தினை விளக்க

ஒளியின் ஒவ்வொரு அலை நீளததிற்கும் ஏற்ப தனித் தடையாக ஈதரை அறிமுகப்படுத்த நிர்பந்தம் வேண்டியுள்ளது. ஃப்ரனல் சூத்திரத்தின் நிருபணம்:—

பிஷோவாவின் (Fizeau's) பரிசோதனை

இச் சோதனைக்கான ஆய்கருவியின் அமைப்பைப் படம் 2ல் காணலாம்.



படம் 2. பிஷோவாவின் பரிசோதனையின் அமைப்பு

ஈதரினூடே புவியின் சார்பிலாத் திசை வேகத்தைக் கண்டறியவும், ஃப்ரனலின் சூத்திரத்தை நிரூபிக்கவும் ஆகிய இரு நோக்கங்களை மையமாகக் கொண்டு இப் பரிசோதனை செய்யப் பட்டது.

பிஷோவா நீரினை ஊடகமாகப் பயன்படுத்தினர். ஓர் ஒளி மூலத்திலிருந்து (S) பெறப்படும் இரண்டு ஒளிக்கற்றைப் பெற்றுர். ஓர் ஒளிக் கற்றையை நீரின் இயக்க திசையிலேயும் மற்றென்றை நீரின் ஓட்டத்திற்கு எதிராகவும் பாய்ச்சினர். இப்பரிசோதனையின்

தத்துவத்தைப் படம் 2 விளக்குவதாக அமைந்துள்ளது. நீரின் இயக்க திசையை அல்லது பாதையை A முதல் F வரை அம்புக் குறியீட்டின் மூலமாகத் தெளிவாகக் குறிக்கப்பட்டுள்ளது. நீர் A B C D E F என்ற குழாய் வழியே பாய்வதாக ஓர் அமைப்பு இருக்கிறது. S என்பது ஒளி மூலம் Sல் இருந்து புறப்பட்ட ஒளியானது பாதிவரை பாதரசம் பூசப்பட்ட ஆடி M_1மீது விழுகிறது. இவ்வாடி கிடைமட்டத்திற்கு 45° கோணத்தில் சாய்த்து வைக்கப்பட்டுள்ளது. M_1 என்ற ஆடி மீது விழும் ஒளியானது இரு கூறுகளாகப் பிரிக்கப்படுகின்றது. அதில் ஒரு கூறு M_1 ஆடியால் எதிரொளித்து $M_1 M_2$ என்ற திசையிலே செல்கிறது. மற்றொரு கூறு M_1 என்ற ஆடியினூடே பாய்ந்து M_1D என்ற திசையிலே செல்கிறது.

எதிரொளிக்கப்பட்ட முதல் ஒளிக்கற்றை M_1 M_2 என்ற திசையிலே சென்று; M_2 என்ற புள்ளியில் M_2C என்ற திசையிலே மீண்டும் எதிரொளிக்கப்பட்டு சென்று மீண்டும் C மற்றும் D என்னும் ஆடிகளால் எதிரொளிக்கப்பட்டு M_1 என்ற ஆடி மீது பாய்கிறது. எனவே எதிரொளிக்கப்பட்ட ஒளிக் கற்றை $M_1M_2CDM_1$ என்ற பாதையில் நீர் இயங்குகின்ற திசையிலேயே செல்கிறது. M_1 ஆடியினூடே பாய்ந்த ஒளியின் மறுகூறு $M_1EDCM_2M_1$ என்ற பாதையில் நீர் இயங்குகின்ற திசைக்கு எதிராகவே செல்கிறது. இரு கற்றைகளும் மீண்டும் M_1 என்ற ஆடியை அடைந்து முடிவாக T என்ற தொலை நோக்கியை வந்தடைகின்றன. இரு கற்றைகளும் சம தூரத்தைக் கடக்க இரு வேறு காலங்களை எடுத்துக்கொள்வதால் தொலைநோக்கியை அவைகள் வேறுபட்ட காலத்தில் வந்தடை கின்றன. இந்த வேறுபாட்டின் காரணமாக ஒளியின் குறுக்கீட்டு விளைவு (interference) என்ற தோற்றப்பாடு எழுகிறது. இதன் பயனாக குறுக்கீட்டு ஒளி வரிகளை (interference fringes) தொலை நோக்கி மூலம் காணலாம்.

இரு ஒளிக் கற்றைகளும் தனித்தனியே கடந்த சமதூரத்தை d எனக் கொள்வோம். சமன்பாடு (4)ல் கண்டுள்ளபடி, நீரின் இயக்கதிசையிலே செல்லும் எதிரொளித்த ஒளிக் கற்றையின் திசை வேகம்

$$= \frac{c}{\mu} + fv + u \left(1 - \frac{1}{\mu_2}\right) \qquad \ldots\ldots(8)$$

ஆகும்.

முதலில் M_1 என்ற ஆடியினூடே பாய்ந்து சென்ற ஒளிக் கற்றையின் திசை வேகம்

$$= \frac{c}{\mu} + fv - u\left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right) \qquad \ldots\ldots (9)$$

ஆகும். இக்கற்றை நீரின் திசைக்கு எதிராகப் பாய்ந்து செல்கிறது.

∴ இப் பாதையின் எதிரொளித்த கற்றை பரவிச் செல்ல எடுத்துக்கொண்ட காலம்

$$t_1 = \frac{d}{\frac{c}{\mu} + fv + u\left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right)} \qquad \ldots\ldots (10)$$

பாதையை இரண்டாம் ஒளிக்கற்றை பரவிச் செல்ல எடுத்துக் கொண்ட காலம்

$$t_2 = \frac{d}{\frac{c}{\mu} + fv - u\left(1 - \frac{1}{\mu_2}\right)} \qquad \ldots\ldots (11)$$

இரு ஒளிக் கற்றைகள் இரு சமதூரத்தைக் கடக்க எடுத்துக் கொண்ட காலங்களின் வேறுபாடு

$$= \frac{d}{\frac{c}{\mu} + fv - u\left(1 - \frac{1}{\mu_2}\right)} - \frac{d}{\frac{c}{\mu} + fv + u\left(1 - \frac{1}{\mu_2}\right)} \qquad \ldots\ldots (12)$$

இவ் வேறுபாடு ஏற்படுவதற்குக் காரணமாக அமைவது நீரின் இயக்கமாகும்.

$$= d \frac{2u\left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right)}{\left\{\frac{c}{\mu} + fv - u\left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right)\right\}\left\{\frac{c}{\mu} + fv + u\left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right)\right\}}$$

$$= 2\,ud\left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right)\left[\frac{\mu^2}{c^2}\left\{1 + \frac{fuv}{c} - \frac{u\mu}{c}\left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right)\right\}^{-1}\left\{1 + \frac{fv\mu}{c} + \frac{u\mu}{c}\left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right)\right\}^{-1}\right]$$

$$= \frac{2ud\,\mu^2}{c^2}\left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right) \qquad \text{......(13)}$$

(உயர்மடி உருப்புக்கள் புறக்கணிக்கப் பட்டபின் ஒளி அலையின் கட்ட வேறுபாடு (phase difference)

$$= \frac{2ud}{c^2 T}\;(\mu^2 - 1) \qquad \text{......(14)}$$

$$= \frac{2u\,dn}{c^2}\;(\mu^2 - 1) \qquad \text{......(15)}$$

இங்கு T என்பது ஓர் அலைவிற்கான அலைவு நேரமாகும், n என்பது ஒளியின் அதிர்வெண். பிஷுவா தனது பரிசோதனையில் குறுக்கீட்டு விளைவு வரிப் பெயர்ச்சியினைக் கண்டார். அப் பெயர்ச்சி சமன்பாடு (15)ல் உள்ள அளவினதாக இருக்கக் கண்டார். இவ்வாறு ஃப்ரனலின் ஈதர் இழுவைச் சூத்திரமானது பிஷுவாவினால் நிரூபிக்கப்பட்டது. ஆனால் இப் பரிசோதனையில் புவியின் திசை வேகத்தைக் கண்டறிய இயலவில்லை. ஏனெனில் கட்ட வேறுபாடு uஐப் பொறுத்து மாறுவதில்லை. [சமன்பாடு (14)].

எனவே மேற்கூறிய கொள்கையைப் பயன்படுத்தி ஈதரில் புவியின் திசை வேகத்தைக் கண்டறிய இயலாது. எனவே ஓர் ஊடகத்தில் ஒளியின் திசைவேகம் $\frac{c}{\mu}$க்கு மட்டும் சமமானது அல்ல என்றும், அது $\frac{c}{\mu} \pm u\left(1 - \frac{1}{\mu_2}\right)$க்கு சமமானது என்று உறுதி செய்யப்பட்டுள்ளது. u என்பது ஊடகத்தின் திசை வேகமாகும். எனவே ஊடகமானது நிலையாக இருப்பின் அதனுள்ளேயிருக்கும் ஈதரும் நிலையாக இருக்கும். ஆனால் ஊடகம் u என்ற திசை வேகத்திலே இயங்கும்போது உள்ளே

யிருக்கும் ஈதரும் மேற்கூறிய திசையிலே இழுக்கப்படுகிறது. அந்த இழுவையின் அளவு $= \pm u\left(1 - \frac{1}{\mu_2}\right)$ எனவே ஒளியின் ஒரு பருப்பொருளைச் சார்ந்த திசைவேகம் மாறிலி அல்ல; ஆனால் ஒளி பாயும் ஊடகத்தின் இயல்பு மற்றும் ஈதரினூடே ஊடகத்தின் திசை வேகம் ஆகியவற்றைப் பொருத்து அமையும் என்பன தெளிவாகின்றன. மேற்கூறிய ஈதர் இழுவைக்கான கோவையை கணிதக் கொள்கையின் அடிப்படையிலும் பெறலாம்.

நீரில் ஒளியின் திசைவேகம் $= u$

ஊடகத்தின் ஒளி விலகல் எண் $= \mu$

ஊடகத்தில் ஒளியின் திசைவேகம் $= \frac{c}{\mu}$ எனவும் கொள்வோம்.

திசை வேகக் கூட்டல் விதியின்படி (Law of Addition of velocities)

$$V = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} = \frac{u+\frac{c}{\mu}}{1+\frac{c}{\mu}\cdot\frac{u}{c^2}}$$

$$= \frac{u+\frac{c}{\mu}}{1+\frac{u}{c\mu}} = \frac{c}{\mu}\left(1+\frac{\mu u}{c}\right)\left(1+\frac{u}{c\mu}\right)^{-1}$$

$$= \frac{c}{\mu}\left(1+\frac{\mu u}{c}\right)\left(1-\frac{u}{c\mu}\right)$$

(உயர் மடியுள்ள உறுப்புக்களைப் புறக்கணித்த பின்)

$$V = \frac{c}{\mu}\left(1-\frac{u}{c\mu}+\frac{\mu u}{c}-\frac{u^2}{c^2}\right)$$

$$= \frac{c}{\mu}\left[1-u\left(\frac{1}{c\mu}-\frac{\mu}{c}\right)\right]$$

(பிற உறுப்புக்களைப் புறக்கணித்த பின்)

$$= \frac{c}{\mu} + u\left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right) \qquad ......(16)$$

மேற்கூறிய இழுவைக்காண கோவையை ஒரு நவீன அடிப்படையிலே லோரண்ட்ஸ் சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்தியும் தர்க்க ரீதியிலே பெறுவதற்கான வழி முறையைக் கீழே காணலாம்.

S மற்றும் S' என்ற இரு நிலைமத் தொகுதிகளை எடுத்துக் கொள்வோம். S' என்ற இயங்கு தொகுதி x ஆயத்தின் திசையிலே v என்ற திசை வேகத்தோடு Sஐ விட்டு விலகி இயக்கிக் கொண்டிருப்பதாகக் கொள்வோம். S என்ற நிலைச் சட்டத்திற்கு ஒப்பாக நம் பரிசோதனைச்சாலையை எடுத்துக் கொள்வோம். S' என்ற இயங்கு சட்டத்திற்கு ஒப்பாக இயங்கும் தண்ணீரைக் கொள்வோம். எனவே தண்ணீரின் திசை வேகம் $= v$ ஆகும். $\frac{c}{\mu} = u'$ என்பது ஒளியின் தண்ணீரைச் சார்ந்த திசைவேகம். அதாவது S'ஐச் சார்ந்த திசை வேகமாகும்.

V என்பதனை ஒளி ஃபோட்டானின் Sஐச் சார்ந்த (பரிசோதனைசாலையை) திசை வேகமானால், பிறகு

$$V = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} = \frac{\frac{c}{\mu} + v}{1 + \frac{c}{\mu} \cdot \frac{v}{c^2}}$$

$$= \frac{\frac{c}{\mu}\left(1 + \frac{v\mu}{c}\right)}{\left(1 + \frac{v}{c\mu}\right)}$$

$$= \frac{c}{\mu}\left(1 + \frac{v\mu}{c}\right)\left(1 + \frac{v}{c\mu}\right)^{-1}$$

$$= \frac{c}{\mu}\left(1 + \frac{v\mu}{c}\right)\left(1 - \frac{v}{c\mu}\right)$$

$$= \frac{c}{\mu}\left(1 + \frac{v\mu}{c} - \frac{v}{c\mu}\right),$$ ($\frac{v}{c}$ யின் அதிகமான மடிகளைப் புறக்கணித்த பின்)

$$= \frac{c}{\mu} + v - \frac{v}{\mu^2} = \frac{c}{\mu} + v\left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right)$$

$$= u' + v\left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right)$$

$$\text{இழுவை எண்} = \frac{v\left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right)}{v} = 1 - \frac{1}{\mu^2}$$

மேற்கூறிய ஈதரின் இழுவை எண்ணிற்கான கோவையைப் ஃப்ரனல் தத்துவார்த்தமாகப் பெற்றார். எனவே இதனை ஃப்ரனலின் ஈதர் இழுவை எண் என்று அழைத்தனர். இக் கருத்தானது உண்மையென பிஷ்ஷுவா (Fizeau) அவர்களால் நிரூபணம் செய்யப்பட்டது.

1·3 மைக்கல்சன்-மார்லியின் சோதனை (Michelson-Morley Experiment)

கோட்பாடு : பூமி சூரியனைச் சுற்றித் தனது நியமனப் பாதையிலே வலம் வருகிறது. பூமி சூரியனைச் சுற்றிவரும் அளப் பரிய வேகம் சுமார் $10^{-4}c$ ஆகும். இங்கு c என்பது ஒளியின் வேகம் (3×10^{10} செமீ/வினாடி வெற்றிடத்தில்). ஒலி பரவக் காற்று போன்ற பிற ஊடகம் தேவைப்படுகிறது. அதே போன்று ஒளி பரவ ஓர் ஊடகம் வேண்டுமல்லவா? இதற்காக ஈதர் என்ற நிலையான ஊடகம் எல்லா இடங்களிலும் வியாபித் திருக்கிறது, என்ற தற்கோளினை (assumption) மேற் கொண்டுள்ளோம். எனவே, ஒளி நிலையாக இயக்கமின்றி இருக்கும் ஈதர் வழியே பரவுகிறது எனக் கொள்வோம். புவியானது இந்த ஈதரினுள்ளே $10^{-4}c$ திசை வேகத்தில் இயங்கிக் கொண்டிருக்கிறது.

புவியைச் சார்ந்த ஒளியின் திசை வேகத்தைக் கணக்கிட முயற்சிகள் நடைபெற்றன. இதன் உதவியால் ஈதரைச் சார்ந்த புவியின் திசை வேகத்தை எளிதில் கணக்கிட்டுக் கண்டறியலாம். இதனைக் கண்டறிய ஈதரில் ஒளியின் திசை வேகம் மிகவும் பயனுள்ளதாக அமையும்.

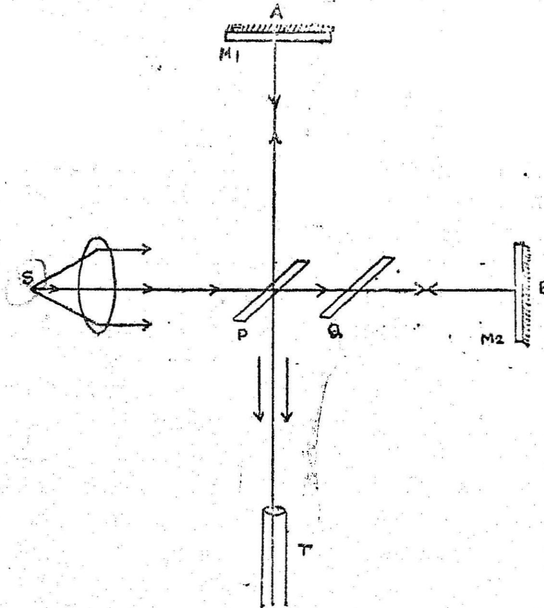
புவியின் மீது ஒரு நோக்குநர் இருப்பதாகக் கொள்வோம். வெளியிலே ஓர் ஒளி மூலம் (light source) ஒளியைப் பரப்பி அஃது புவியின் மீதுள்ள நோக்குநரை வந்தடைவதாகக்

கொள்வோம். புவியின் மீது உள்ளவர் புவியின் இயக்கத்தோடு இயங்கிக்கொண்டு இருப்பார். ஒளியும் இதே திசையில் பரவி வந்தால் நோக்குநரை ஒளி அடைய அதிகக் காலம் எடுத்துக் கொள்ளும். இதற்கு மாறாக நோக்குநர் இயங்கி வரும் திசைக்கு நேர் எதிர் திசையில் ஒளி பரவி அவரை அடைவதாகக் கொண்டால் ஒளியானது அவரை அடைய மிகக் குறைந்த கால அளவை எடுத்துக் கொள்ளும். இரண்டாவதாகக் கூறியதில் நோக்குநரும் ஒளிக்கற்றையும் எதிர் எதிராக வருவதால் குறைந்த கால இடைவெளியில் சந்திப்பு நிகழும். மேற்கூறிய சோதனையின் முக்கியக் குறிக்கோளாக அமைவது இவ்விரண்டு வழிகளில் ஒளி நோக்குநரை வந்து சேர்வதற்காக எடுத்துக் கொண்ட கால அளவில் ஏற்பட்டுள்ள வித்தியாசத்தைக் கண்டு கொள்வது என்பதேயாகும். இக்கால வித்தியாசத்தைக் கொண்டு ஈதருக்கும் புவிக்கும் இடைப்பட்ட சார்பு திசை வேகத்தைக் கண்டறியலாம். ஈதர் நிலையான ஊடகமானால் இத்தகைய புவியின் சார்புத் திசை வேகத்தை உறுதியாகக் கண்டறியலாம். இச் சோதனையை 1887ஆம் ஆண்டில் மைக்கல்சனும் மார்லியும் கூட்டுச் சேர்ந்து செய்து காட்டினர். இச் சோதனை இயற்பியல் முன்னேற்றத்தில் முக்கியத்துவம் வாய்ந்த சிறப்புச் சோதனையாக அமைந்துள்ளது.

இச் சோதனையில் மைக்கல்சன் மார்லி குறுக்கீட்டு விளைவுமானி (interferometer) பயன்படுத்தப்பட்டது. ஒளியானது தனது மூலத்திலிருந்து புறப்பட்டு புவியின் இயக்கத் திசையோடு ஒன்றியும்; புவியின் இயக்கத் திசைக்கு நேர் எதிராகப் பரவியும் புவியில் உள்ள நோக்குநரை வந்து அடைய கால வேறுபாடு ஏற்படுகிறது. புவியின் இயக்கத்தோடு ஒன்றி வரும் ஒளிக்கற்றை நோக்குநரை வந்தடைய அதிக காலம் எடுத்துக் கொள்ளும். புவியின் இயக்கத்திற்கு நேர் எதிராக வரும் ஒளிக்கற்றை நோக்குநரை எளிதில் வந்து அடையும் இவையிரண்டிற்கும் உள்ள கால வேறுபாட்டினை மைக்கல்சன் மார்லி குறுக்கீட்டு விளைவு மானியின் உதவி கொண்டும், ஒளியின் குறுக்கீட்டு விளைவு (interference) ஏற்படுத்தும் வரிகளில் (fringes) பெயர்வு (shift) எந்த அளவு உள்ளது என்பதை விளைவுமானியால் கண்டறிந்தும் கணக்கிடலாம்.

மைக்கல்சன் - மார்லி சோதனையின் அமைப்பு : இச் சோதனை அமைப்பைக் கீழ்க்கண்ட படத்தில் (3ல்) காண்க. இதில் S என்பது ஒற்றை நிற ஒளியை

(monochromatic light) உமிழும் ஒற்றை நிற மூலமாகும். P என்னும் கண்ணாடித் தகடு ஒளிவரும் திசைக்கு 45° கோணத்தில் பொருத்தப்பட்டுள்ளது. இதன் சரி பாதிப்பாகம் ஒளியைப் பிரதிபலிப்பதாகவும் மற்றொரு பாதி ஒளியைத் தன்னகத்தே தடையின்றி செலுத்திக் கொள்வதாகவும் உள்ள அமைப்பைப் பெற்றுள்ளது. M_1 M_2 என்ற இரு ஆடிகளில் முன் தளத்தில் பாதரசம் நன்கு பூசப்பட்டுள்ளது. இதனால் இவற்றின் மேல்படும் ஒளியானது பல் அக எதிரொளிப்பால் (multiple internal reflection) சிதறுது. Pஐப் போன்ற தடிமனும், அதே போன்ற கண்ணாடியால் செய்யப்பட்ட மற்றொரு கண்ணாடித் தகடு Q ஆனது Pக்கு இணையாகப் பொருத்தப்பட்டுள்ளது. Q என்ற கண்ணாடி தன்மீது படும் ஒளியை எதிரொளிக்காது தன்னூடே பாயவிட்டு விடும்.



படம் 3. மைக்கெல்சன்—மார்லி சோதனையின் அமைப்பு

ஒற்றை நிற ஒளி மூலத்திலிருந்து பெறப்பட்ட ஒளிக் கற்றை P என்ற கண்ணாடித் தகட்டில் விழுகிறது. Pயின் மேல் பாதிப் பாகம் பாதரசம் பூசப்பட்டுள்ளது; கீழ் பாதிப் பாகம் தெளிவாக உள்ளது. இதன் மீது படும் ஒளிக்கற்றையை இக்கண்ணாடி Pயானது இரு கூறுகப் பிரித்து விடுகின்றது. ஒரு பகுதி எதிரொளிக்கப்பட்டு M_1 என்ற கண்ணாடியை அடைகின்றது. மறுபகுதி Pயினுள்ளே எளிதில் பாய்ந்து Pயின் பின்புறத்தை வந்தடைகிறது. M_1 என்ற ஆடியை அடைந்தஒளிக்கற்றைமீண்டும்

M_1ஆல் எதிரொளிக்கப்பட்டு மீண்டும் P என்ற கண்ணாடித் தகட்டினை வந்தடைகிறது. இவ்வொளிக் கற்றை Pயினுள் பாய்ந்து T என்ற தொலைநோக்கியை வந்தடைகின்றது. முதலில் Pயினுள் பாய்ந்து வெளிவந்த ஒளிக்கற்றை Q வழியாகப் பாய்ந்து சென்று M_2 என்ற ஆடியில் செங்குத்தாகப் பட்டு வந்த வழியிலேயே (BP) எதிரொளிக்கப்பட்டு திரும்பிவந்து மீண்டும் Pஐ அடைகிறது. இவ்வொளிக் கற்றை Pயினால் எதிரொளிக்கப்பட்டு T என்ற தொலைநோக்கியைச் சென்று அடைகிறது. இவ்வாறு இரண்டு ஒளிக்கற்றைகள் T தொலைநோக்கியை வந்தடைகின்றன. இதனால் குறுக்கீட்டு விளைவு (Interference) என்ற இயற்பாடு (phenomenon) ஏற்படுகின்றது. இதன் பயனாக ஒளி குறுக்கீட்டு விளைவு வரிகள் (light interefrence fringes) பெறப்படுகின்றன.

Q என்ற கண்ணாடித் தகட்டின் செயலும் பயனும்: ஒளிக் கற்றையின் முதல் ஒரு பகுதி P என்ற கண்ணாடித் தகட்டினால் எதிரொளிக்கப்பட்டு Pஐ இருமுறை சந்தித்து அதனுள்ளே செல்கிறது. ஆனால் ஒளிக் கற்றையின் மற்றொரு பகுதி Q என்ற தகடு இல்லாவிடில் முழுவதும் காற்றிலேயே பரவுவதாக அமைந்துவிடும். இங்கு Pக்கும் M_1க்கும், Pக்கும் M_2க்கும் உள்ள தூரம் சமமாக இருக்கின்றது. Pயில் எதிரொளிக்கப்பட்ட முதல் ஒளிக்கற்றை இரண்டாம் ஒளிக்கற்றையைவிட $2(\mu-1)t$ என்ற அளவு அதிகமாக ஒளி ஊடகத்தில் ஊடுருவிச் செல்கிறது. (μ என்பது P என்ற கண்ணாடிக்கு ஊடகத்தின் ஒளி விலகலெண்; t என்பது P என்ற கண்ணாடித் தகட்டின் தடிமன்). முதல் ஒளிக்கற்றை, அதிக தூரம் பரவுகிறது. இரண்டாம் ஒளிக்கற்றை, குறைந்த அளவு தூரமே செல்கிறது. இதனைச் சரிகட்டவே Q என்ற கண்ணாடித் தகடு வைக்கப் பட்டுள்ளது. இதன் வழியே இரண்டாம் ஒளிக் கற்றை செல்வதாக அமைந்தால் இரு பிரிவு ஒளிக் கற்றைகளும் சமமான ஒரு தூரத்தைப் பரவிச் செல்வதாகக் கொள்ளலாம். இரு ஒளிக் கற்றைகளுக்கும் ஒரு சமமான ஒளி ஊடகப் பாதையை ஏற்படுத்துவதே Q என்ற கண்ணாடித் தகட்டின் முக்கியச் செயலாக அமையும். எனவே, Pயிலிருந்து M_1ம் M_2ம் சம தூரத்தில் இருப்பதாக ஓர் அமைப்பு இருக்குமேயானால் இரு ஒளிக் கற்றைகளும் சம தூரத்தைக் கடந்து பின்னர் தொலை நோக்கியினை வந்து சேர்வதாகக் கொள்ளலாம்.

இப்போது ஈதர் என்ற ஊடகம் நிலையாக இருப்பதாகக் கொள்வோம். ஆய்கருவியானது புவியின் மேல் பொருத்தப் பட்டுள்ளது. எனவே, ஆய்கருவியும் புவியின் திசை வேகத்தோடு இயங்கிக்கொண்டு இருக்கிறது. இத் திசை வேகத்தின் திசை ஒளிக்கற்றை செல்லும் திசையை ஒத்ததாகவும் இருக்கிறதென்று கொள்வோம்.

இத்தகைய புவியின் இயக்கத்தால் அதாவது ஆய்கருவியின் இயக்கத்தால் ஒளிக்கற்றையின் இரு கூறுகளும் கடக்கும் ஒளிப் பாதை ஒன்றுக்கொன்று சமமானதாக இருக்க முடியாது. எனவே M_1 மற்றும் M_2 என்ற இரு ஆடிகளில் ஏற்படும் இரு வேறுபட்ட ஒளிக் கற்றைகளின் எதிரொளிப்பு முறையே A மற்றும் B என்ற புள்ளிகளிலே ஏற்படுகின்றன. P என்ற கண்ணுடித் தகட்டின் இடம் ஆய்கருவியின் இயக்கத்தால் P′ என்ற இடத்தை ஒரு குறிப்பிட்ட இடைக் காலத்தில் அடைகிறது. படத்தில் Q என்ற கண்ணுடித் தகட்டின் இருப்பிடத்தை வசதிக்காக கோடிட்டு காட்டவில்லை. இங்கு நாம் ஒளிக் கற்றையின் இரு பகுதிகளின் பாதையைப் பற்றிச் சிந்திப்போம். முதல் ஒளிக் கற்றையில் எதிரொளிப்பு உண்டு. இரண்டாம் ஒளிக்கற்றை P என்ற கண்ணுடித் தகட்டினுள் பாய்ந்து செல்கிறது. எனவே முதற்கற்றையை எதிரொளித்த கதிர் எனவும், மற்றென்றை ஊடுருவிப் பாய்ந்த கதிர் எனவும் கொள்வோம். இவ்விரண்டு ஒளிக கற்றைகளின் ஒளிப் பாதைகள் சமமானதாக இல்லை எனக் கண்டோம். எனவே இரு ஒளிக் கற்றைகளும் Pயிலிருந்து புறப்பட்டு M_1 மற்றும் M_2 என்ற ஆடிகளை அடைந்து திரும்பி Pயினை வந்தடைய எடுத்துக் கொண்ட காலங்களும் சமமானதாக இருக்காது. முதற் கண் இரண்டு ஒளிக் கற்றைகளும் தாம் சென்ற ஒளிப்பாதைகளுக்கு இடையேயுள்ள வேறுபாட்டினைக் கணக்கிட்டுக் கண்டறிவோம்.

ஒளியின் திசைவேகம் = c செமீ/விநாடி

ஆய்கருவியின் (புவியின்) திசைவேகம் = v செமீ/விநாடி

Pக்கும் Aக்கும் இடைப்பட்ட தூரம் = PA = D செமீ

Pக்கும் Bக்கும் இடைப்பட்ட தூரம் = PB = D செமீ

ஊடுருவி பாய்ந்து செல்லும் ஒளிக்கற்றை Pயிலிருந்து புறப்பட்டு B′ஐ அடைந்து பின்னர் B′யிலிருந்து P′ஐ வந்து அடைய எடுத்துக் கொண்ட காலம் = t_1 விநாடிகள். எதிரொளித்துச் செல்லும் ஒளிக்கற்றை Pயிலிருந்து புறப்பட்டு A′ஐ அடைந்து பின்னர் A′விருந்து P′ஐ வந்து அடைய எடுத்துக்கொண்ட காலம் = t_2 விநாடிள்.

t_1ஐ கண்டு கொள்ள:

ஒளியின் சார்பு திசை வேகம் PB′ என்னும் திசையில்... = $c + v$

ஒளியின் சார்பு திசைவேகம் B'P' என்னும் திசையில் ... $= c - v$
இரு திசைகளிலும் சென்ற தூரம் $=$ D.

$$\text{எனவே, } t_1 = \frac{D}{c-v} + \frac{D}{c+v} = \frac{2\,Dc}{c^2 - v^2}$$

$$= \frac{2\,Dc}{c^2} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{2D}{c}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}$$

$$t_1 = \frac{2D}{c}\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \qquad (1)$$

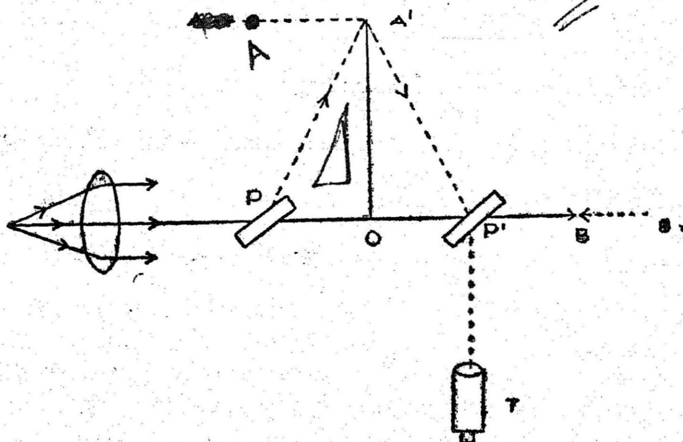
(v/cயின் மேற் மடிகளை புறக்கணித்த பின்)

<u>t_2ஐ கண்டு கொள்ள:</u>

படத்தில் உள்ள △ PA'Oவிலிருந்து

$$(PA')^2 = (PO)^2 + (A'O)^2$$

$$= (AA')^2 + (A'O)^2 \quad \because PO = AA'$$



படம் 4. இரண்டு ஒளிக்கற்றைகளும் தாம் சென்ற ஒளிப்பாதைகளுக்கு இடையேயுள்ள வேறுபாட்டினைக் காட்டுவது.

ஒளி கடந்த தூரம் $=$ திசைவேகம் $\times$ காலம் (t) PA என்ற தூரத்தைக் கடக்க ஒளிக்கற்றைக்கான காலம் $= t$.

$\therefore \quad PA' = c \times t = ct$

$\because$ ஒளிக் கற்றையின் திசை வேகம் $= c$

மேலும் $AA' = v \times t$. இங்கு v என்பது ஆய்கருவியின் திசை வேகமாகும்.

எனவே, $c^2t^2 = v^2 t^2 + D^2$

அல்லது $(c^2 - v^2)\, t^2 = D^2$

$$\therefore \quad t = \frac{D}{\sqrt{c^2 - v^2}} \qquad (2)$$

$$\therefore \quad t^2 = \frac{2D}{\sqrt{c^2 - v^2}} \qquad (3)$$

இங்கு ஒளிக் கற்றையின் திசை வேகம் A′ P′ நோக்கிச் செல்லும் கற்றையின் திசை வேகத்திற்குச் சமமான தாகும்.

$$= \frac{2D}{c} \times \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

$$= \frac{2D}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= t_2 = \frac{2D}{c} \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) \qquad (4)$$

$\left(\frac{v}{c}\right.$ யின் உயர் மடிகளைப் புறக்கணித்தபின்$\left.\right)$ ஒளி எதிரொளிப்புக் கற்றையும் ஒளி ஊடுருவிப் பாய்ந்த கற்றையும் தாம் எடுத்துக்கொண்ட கால அளவின் வித்தியாசத்தை Δt எனக் கொள்வோம்.

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2D}{c}$$

$$= \frac{2D}{c}\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{2D}{c}\left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right)$$

$$= \frac{2D}{c}\left(\frac{v^2}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2}\right) = \frac{2D}{c} - \frac{v^2}{2c^2}$$

$$= Dv^2/c^3 \quad (5)$$

மேற்கூறிய ஒளிக்கற்றைகள் தாம் கடந்து வந்த ஒளிப் பாதையிலே வித்தியாசம்,

$$= \frac{Dv^2}{c^2 T} = \frac{Dv^2}{c^3} \cdot \nu = \frac{Dv^2}{c^3} \cdot \frac{c}{\lambda}$$

$$= \frac{Dv^2}{c^2 \lambda} \quad (6)$$

இங்கு T = அலைவு நேரம்; ν = அதிர்வெண்.

λ = அலை நீளம் (ஒளியின் அலைநீளம்)

மேற்கூறிய சமன்பாட்டின்படி, ஒளியின் குறுக்கீட்டு விளைவினால் ஏற்படும் வரிகளின் பெயர்வு $= \frac{Dv^2}{c^2\lambda}$

இப்போது ஆய்கருவி முழுவதையும் 90° பாகை இயக்கிப் புதிய நிலையிலே நிறுத்துவதாகக் கொள்வோம். எனவே ஒளிப் பாதையிலே ஏற்பட்ட வித்தியாசம் இப்போது நேர் எதிராக அமையும். எனவே ஒளி வரிகள் (fringes) தற்போது இரு மடங்கு பெயர்வு பெறும். இப்போது ஒளியின் குறுக்கீட்டு விளைவினால் ஏற்படும் வரிகளின் பெயர்வு

$$= \frac{2Dv^2}{c^2\lambda} \quad (7)$$

இச் சமன்பாட்டின்படி வரிப் பெயர்ச்சி இருமடங்காக இருக்கவேண்டும் என்பது தெளிவாகிறது. அதாவது குறுக்கீட்டு விளைவுமானி முன்பிருந்த நிலையைவிட்டு 90° பாகை இயங்கி புதிய நிலையை அடையும்போது முன்பிருந்ததைப் போன்று இருமடங்கு வரிப்பெயர்ச்சியைக் குறுக்கீட்டு விளைவுப் பாங்கத்தில் ஏற்படுத்த வேண்டும்.

இப்போது பரிசோதனையில் பயன்படுத்தப்பட்ட சோடியம் ஆவி விளக்கு உமிழும் ஒளியின் அலைநீளம் $\lambda = 5{\cdot}9 \times 10^{-5}$

செமீ என்றும், ஒளியின் திசை வேகம் $c = 3 \times 10^{10}$ செமீ/விநாடி. கருவியின் திசைவேகம் $v = 3 \times 10^{6}$ செமீ/விநாடி. எனவும் கொண்டு புதிய நிலையிலே வரிப்பெயர்ச்சியினைக் கணக்கிடுவோம்.

$$\text{வரிப்பெயர்ச்சி} = 2D \left(\frac{3 \times 10^{6}}{3 \times 10^{10}}\right) \times \frac{1}{5 \cdot 9 \times 10^{-5}}$$

$$= 4 \times 10^{-4}\, D$$

$D = 10$ மீட்டராக அல்லது 1000 செமீ ஆக உள்ளபோது வரிப் பெயர்ச்சி = 0·4 ஆக இருக்கிறது. மைக்கல்சனும் மார்லியும், தமது கருவியை 90° இயக்கியபின் 0·4 என்ற அளவு வரிப் பெயர்ச்சியை எதிர் நோக்கினர். மேலும் அவர்கள் குறைந்த அளவு அதாவது ஒரு வரியின் ·01 என்ற பகுதி அளவிலாவது பெயர்ச்சியைக் காணலாம் என நம்பினார்கள். ஆனால், பரிசோதனையின்போது அவர்கள் எதிர்பார்த்த அளவுகூட வரிப் பெயர்ச்சி கிடைக்கவில்லை. எனவே அவர்கள் பரிசோதனையை மீண்டும் மீண்டும் புவியின் பல்வேறு புள்ளிகளில் ஒரு வருடத்தின் பல்வேறு காலங்களில் செய்து பார்த்தனர். இவை ஒன்றிலும் அவர்கள் எதிர்பார்த்த முடிவு கிடைக்கவில்லை.

எனவே, மைக்கல்சன் மார்லி ஆகியோரால் செய்து பார்க்கப்பட்ட பரிசோதனைகளின் முடிவாக கீழ்க்கண்டவற்றைக் கூறலாம்.

பூமியின் ஈதரைச் சார்ந்த வேகத்தை அளந்து கண்டறிவது என்பது முடியாத செயலாகும், என்பதே அம் முடிவாகும். ஆதலினாலே ஈதர் என்பதையும் கண்டு உணர இயலாது. இம் முடிவினை மைக்கல்சன் மார்லி பரிசோதனையில் கிடைத்த எதிர் முடிவு (negative result) என்பர்.

இந்த எதிர் முடிவினைக் கீழ்க்கண்டவாறு விளக்கங்களைத் தரலாம்.

எதிர் முடிவிற்கான விளக்கங்கள் :

(a) மைக்கல்சனின் விளக்கம்

பூமி சூரியனை வலம் வரும்போது ஈதரினூடே செல்ல வேண்டும். ஈதர் அசையாது இருப்பதாகக் கொண்டால்

பூமிக்கும் ஈதருக்கும் இடைப்பட்ட சார்பு இயக்கம் பிறக்கும். ஆனால், பூமி இயங்கும்போது ஈதரையும் தன்னுடன் இழுத்துச் (drags the ether) செல்கிறது. ஆதலினாலே இந்நிலையில் பூமிக்கும் ஈதருக்கும் இடைப்பட்ட சார்பு இயக்கத்தைக் காண்பதரிது. ஆய்கருவியும் பூமியோடு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே பூமியினோடு பொருந்திய ஆய்கருவி ஈதரினுள்ளே இயங்கவில்லையென்று சொல்லலாம். இவ்வித விளக்கத்தை மைக்கல்சன் அவர்களே தந்துள்ளார்கள். இவ்விளக்கத்தைச் சரியென்று கொண்டால் புதிய சிக்கல் ஒன்று எழுகிறது. விண்மீன் ஒளியிலே ஏற்படுகின்ற ஒளிப் பிறழ்ச்சி (aberration of star light) பற்றிய தோற்றப்பாட்டினைச் சோதனை மூலம் விளக்குவதென்பது இயலாத ஒரு செயலாக அமைந்துவிடும். இவை ஏற்கனவே சோதனைகள் மூலம் உண்மையென்று ஏற்றுக் கொள்ளப்பட்டனவாகும். எனவே, புதிய முரண்பாடு தோன்றுவதாகவுள்ளது.

(b) லோரண்ட்ஸ் - ஃபிட்ஸ்ஜெரால்டு குறுக்கம் (Lorentz-Fitzgerald Contraction)

மேற்கூறிய சோதனையை நுட்பமாகச் செய்தபோதும் எதிர்பார்த்த முடிவை அடைய இயலவில்லை. குறைந்த அளவில்கூட வெற்றி கிட்டவில்லை. இத்தகைய எதிர் முடிவு ஈதரின் அசையாத் தன்மையைக் கூறும் கருத்தைவிட ஈதர் இழுத்துச் செல்லப்படுகின்றது என்ற கருத்திற்கு ஆதரவு தருவது போன்று உள்ளது. அசைவிலா ஈதர் கருத்தின் தந்தைகளான லோரண்ட்ஸ் மற்றும் ஃபிட்ஸ்ஜெரால்டு ஆகியோரின் விந்தைமிகு விளக்கத்தை ஈண்டு காணலாம். இவ்விளக்கத்தை 1892ல் லாரன்ஸ், ஃபிட்ஸ்ஜெரால்டு என்ற இருவரும் தனித் தனியே ஒரு கருத்தைக் கூறியுள்ளனர். அக் கூற்றுக்களின்படி, நிலையான ஈதரினுள் ஒரு பொருள் இயங்கும்போது பொருளின் மூலக்கூறுகளில் ஏற்படும் மின்விசைகளின் செயல், எதிர் செயல் ஆகியவற்றில் மாறுதல் ஏற்படுகின்றன. இதன் விளைவாகப் பொருளின் அளவு (நீளம் முதலியன) மற்றும் உருவம் ஆகியவற்றில் மாற்றம் ஏற்படும். எனவே நாம் கண்ட கணக்கீட்டில் இம் மாறுதல்கள் ஒரு மாற்றத்தை ஏற்படுத்தும் கருவியானது பூமியின் இயக்கத்தின் திசையில் அமைந்த பாதையிலே செல்லும் போது கருவியின் நீளம் $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ என்ற அளவிலே குறைகிறது. எனவே நாம் கண்ட மாறான முடிவில் வரிப்

பெயர்ச்சிக்கு ஒப்பான அளவு இங்கு மாற்றம் ஏற்படுத்தப்பட்டு விடுவதால் நாம் எதிர்பார்த்த வரிப்பெயர்ச்சி காணப்படுவதில்லை.

மேலும் சமன்பாடு எண் (1)ல் Dக்கு மாற்றாக $D\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ என்ற கணியத்தையிட்டால் இச் சமன்பாடு எண் (3)க்குச் சமமாகும். ஆதலினாலே $t_1 = t_2$ எனப்படும். அதாவது கால மாறுபாடு ஏதும் ஏ[redacted]து. எனவே வரிப்பெயர்ச்சியும் ஏற்படாது. இவ் விளக்கத்தை லோரண்ட்ஸ், ஃபிட்ஸ்ஜெரால்டு விளக்கம் என்பர். லோரண்ட்ஸ் அவர்களின் கருத்துப்படி இது பொருளின் குறுக்கம், பொருளின் மெய்யான தன்மையாகும்.

இவ்விளக்கம் தொல்லையில் விடுதலை பெறவே உதவும் எனப் பலர் எண்ணினார்கள். லார்டு ரலே (Lord Rayligh) என்பாரும் இவ் விளக்கத்தைச் சரியானதென்று ஒப்புக்கொள்ள இயலாத ஒரு நிலையிருந்தது.

(c) ஐன்ஸ்ட்டைன் அவர்களின் விளக்கம்

மேற்கூறிய சார்பற்ற இயக்கம் என்னும் பிரச்சனைக்குத் தீர்வுகாணும் முகத்தான் பல விளக்கங்கள் கொடுக்கப்பட்டன. இவைகள் யாவும் குழப்பத்தை மேன்மேலும் செறிவு கொண்டதாக ஆக்கிவிட்டன. இத் தோற்றப் பாட்டிற்கான அடிப்படைக் கொள்கையே தவறானதாக இருக்குமோ என்றும் எண்ண ஆரம்பித்தனர். இந்நிலையிலே ஐன்ஸ்ட்டைன் ஒரு புரட்சிகரமான கருத்தை வெளியிட்டார். இக் கருத்தின்படி ஈதர் என்று ஒன்று இல்லவேயில்லையென்றும் அதனைக் கண்டு கொள்ளும் முயற்சியில் வீணாகக் காலத்தைக் கழிப்பது நல்லதல்ல என்றும் கூறினார். எனவே ஈதர் பற்றிய பிரச்சனைக்கு ஒரு முடிவு கட்டினார். ஈதரினூடே இயக்கம் என்பது பொருளற்றது என்றார். ஒரு பருப்பொருளைச் சார்ந்த இயக்கத்தைப் பற்றிப் பேசுவதிலோ அல்லது ஆராய்வதிலோ உண்மையுண்டு. இதற்கு தனிச் சிறப்பும் உண்டு எனவும் கூறினார். இவர் ஒரு புரட்சிகரமான கருத்தை வெளியிட்டார். இக் கோட்பாட்டிற்கு சார்பியல் கோட்பாடு எனப் பெயர். அக் கோட்பாட்டின்படி ஒளி இயல் விதிகளுக்கேற்ப காலம் (time) மற்றும் வெளி (space) இவற்றிற்கு நவீன முறையிலே விளக்கம் தந்தார். இவை பழைய கொள்கைகளை நீக்கி புதிய கண்ணோட்டத்திற்கு வழி

வகுத்தன. மேலும் இவர் கொள்கையின்படி, ஒளி மற்றும் ஒளியைப் போன்ற எல்லா மின்காந்த தோற்றப்பாடுகளும் (electromagnetic phenemenon) சார்பியல் கோட்பாட்டைத் தழுவியே நடக்கின்றன, என்பது தெளிவாகும்.

மேற்கூறிய பரிசோதனையில் ஆய்கருவியானது ஈதரைச் சார்ந்து நிலையாக இருப்பின், ஒளியானது இரு வேறு எதிர்த் திசைகளில் பாய்வதற்கான நேரமானது ஒன்றுக்கொன்று சமமாக இருக்கிறது. இதுவன்றி, ஆய்கருவியானது ஈதரைச் சார்ந்த சீரான இயக்கத்திலுள்ளபோதும் மேற்கூறிய முடிவை சார்பியல் கொள்கையைக் கொண்டு பெற்றுவிட இயலும்.

இவ்வாறு இக் கொள்கை நடைமுறையில் கண்ட உண்மைகளைக் கொள்கையோடு தொடர்பு ஏற்படுத்துவதில் ஏற்பட்ட சிக்கல்களை நீக்கிவிட்டது. இப் புதிய சார்பியல் கொள்கை பௌதிகத் தோற்றப்பாடுகள் மற்றும் நிகழ்ச்சிகளுக்கும் நவீன விளக்கங்களைத் தந்துள்ளது.

மைக்கல்சன் மார்லி சோதனையில் ஒளி வரிப் பெயர்வு எவ்வளவு என்று கண்டறிக. கீழ்க்கண்ட கணியங்கள் தரப் பட்டுள்ளன.

$D = 1100$ செமீ

$v = 3 \times 10^{6}$ செமீ/விநாடி.

$\lambda = 6 \times 10^{-5}$ செமீ

$c = 3 \times 10^{10}$ செமீ/விநாடி.

ஒளி வரிப்பெயர்ச்சி (fringe shift) $= x_0 = \dfrac{2Dv^2}{c^2 \lambda}$

$$x_0 = \frac{2 \times 1100 \times 9 \times 10^{12}}{9 \times 10^{20} \times 6 \times 10^{-5}}$$

$$= 0{\cdot}37$$

அதாவது ஒரு வரியின் அகலத்தில் 0·37 பங்கு வரிப்பெயர்ச்சி ஏற்பட வேண்டும்.

பயிற்சி

(1) ஒளியின் திசை வேகத்தின் முக்கியப் பண்புகள் என்ன? ஒளியின் திசை வேகத்தை பரிசோதனை மூலம் எவ்வாறு கண்டறியலாம்?

(2) மைக்கல்சன்-மார்லி பரிசோதனையை விளக்கவும். இதன் முடிவின் முக்கியத்துவம் என்ன?

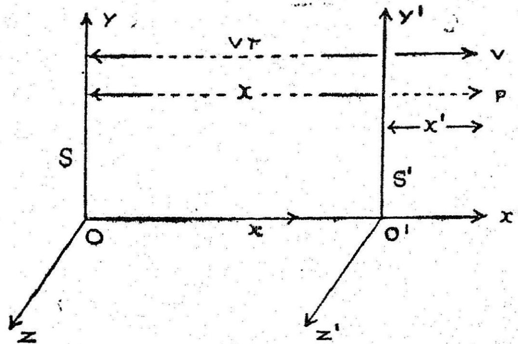
(3) சிறப்புச் சார்பியல் கொள்கை தோன்றுவதற்கான காரணங்களைக் கூறுக. இதற்கு அடிப்படையாக அமைந்துள்ள பரிசோதனை நிரூபணம் யாவை?

2. சிறப்புச் சார்பியல் கோட்பாடு

2.1. கேலிலியன்—நியூட்டன் நிலைமாற்றுச் சமன்பாடுகள் (The Galilean–Newtonian Transformation)

பௌதிக கணியங்களின் சார்பியல் பற்றி இங்குக் காண்போம். கேலிலியோ, நியூட்டன் ஆகியோர் சார்பியலில் பல கணிதச் சமன்பாடுகள் உருவாக்கி அவைகளின் வாயிலாகப் பல உண்மைகளை வெளிப்படுத்தியுள்ளனர். இத்தகைய பௌதிகக் கணியங்கள் தொடர்புள்ள நிகழ்ச்சிகள் எவ்வாறு செயல்படும்? இந்நிகழ்ச்சி ஒரு மேற்கோள் சட்டத்தில் நிகழும் போது மற்ருெரு மாருத திசை வேகத்தில் இயங்கும் மேற்கோள் சட்டத்தில் இருப்போர்க்கு இக் காட்சி எவ்வாறு இருக்கும்? என்பன போன்றவற்றை ஈண்டு காண்போம்.

S மற்றும் S′ என்ற இரண்டு மேற்கோள் சட்டங்களை எடுத்துக் கொள்வோம். S என்ற சட்டத்தை O என்ற தோற்றுவாய் கொண்ட நிலைச் சட்டமாகக் கொள்வோம். S′ என்ற சட்டத்தை O′ என்ற தோற்றுவாய் கொண்ட இயங்கு சட்டமாகக் கொள்வோம்.



படம் 5. நிலைமைத் தொகுதி (Inertial frame)

S' என்ற இயங்கு சட்டம் v என்ற சீர்திசை வேகத்தோடு (uniform velocity) x என்ற திசையிலே இயங்கிச் செல்வதாகக் கொள்வோம் இரு சட்டங்களின் தோற்றுவாய்கள் O மற்றும் O' தொடக்கத்தில் ஒரு புள்ளியில் இணைந்து இருப்பதாகக் கொள்வோம். இந்த நிலையிலே காலத்தையும் அளக்கத் தொடங்குவோம். S என்ற நிலைச் சட்டத்தில் O என்ற தோற்று வாயில் ஒரு நோக்குநர் நிற்பதாகக் கொண்டு, அவர் P என்ற புள்ளியில் நிகழும் நிகழ்ச்சியினைக் காட்சிப் பதிவு செய்வதாகக் கொள்வோம். இப்புள்ளி Pயின் ஆயங்கள் (x, y, z) ஆகும். இந்நிகழ்ச்சி செயல்படும் காலத்தை Sல் உள்ள கடிகாரம் t எனக் காட்டுவதாகக் கொள்வோம். இதே போன்று S' என்ற இயங்கு சட்டத்தில் O' என்ற தோற்றுவாயில் பிறிதொரு நோக்குநர் நிற்பதாகக் கொண்டு அவர் P என்ற புள்ளியில் நிகழும் நிகழ்ச்சியைக் காட்சிப் பதிவு (observation) செய்வதாகக் கொள்வோம். இப் புள்ளி Pயின் தற்போதைய ஆயங்கள் (x', y', z') ஆகும். இந்நிகழ்ச்சி செயல்படும் நேரத்தை S'யில் உள்ள S' உடன் இயங்கும் கடிகாரம் t' எனக் காட்டுவதாகவும் கொள்வோம்.

இப்போது இரண்டு சட்டங்களிலும் அளக்கப்பட்ட அளவுகள் உள்ளன. இவையிரண்டும் ஒரே நிகழ்ச்சியைப் பற்றியது. இரண்டு சட்டங்களிலும் உள்ள அளவுகள் எங்ஙனம் தொடர்பு கொண்டுள்ளன என்றும் காண்போம்.

t என்ற கால இடைவெளியில் S' என்ற இயங்கு சட்டம் (v என்ற சீர் திசை வேகத்தில் இயங்கிக் கொண்டுள்ளது) கடந்த தூரம் $= OO' = vt$. இந்த தூரமானது x திசையிலே S' கடந்த தூரமாகும். x என்ற ஆயம் OA என்ற தூரத்தையும் x' என்ற ஆயம் O'A என்ற தூரத்தையும் குறிப்பதாக அமைந்துள்ளது. எனவே,

$$x' = x - vt \qquad ...(1)$$

மேலும் y மற்றும் z திசைகளிலே சார்பான இயக்கம் இல்லாமல் இருப்பதால்,

$$y' = y \qquad ...(2)$$

மற்றும் $$z' = z \qquad ...(3)$$

மேலும் மிகத் தொன்மையான சார்பியலின்படி காலம் சார்பில்லாதது (absolute) அல்லது பொதுவானது (universal) ஆகும். எனவே ஒரு மணி கால இடைவெளி (time interval) எல்லா இடத்திலும் ஒன்றுதான். இதனை சென்னையிலோ, டெல்லியிலோ அல்லது ஜெட்விமானத்தில் விரைவாகச் செல்லும் போதோ அளந்தாலும் ஒன்றுதான். இதில் மாற்றமில்லை. எனவே இக்கொள்கையை உண்மையென்று நம்புவோமாயின், அதாவது காலம் சார்பில்லாதது அல்லது பொதுவானது எனக் கொண்டால்,

$$t' = t \qquad \ldots(4)$$

இதுவரை நாம் பார்ப்பதற்கு மாருக S′ என்ற சட்டம் நிலையாக இருப்பதாகக் கொண்டால் O என்ற புள்ளியில் உள்ள நோக்குநர் S என்ற சட்டம் முன் சென்ற திசைக்கு நேர் எதிராக x திசையிலே இயங்குவதாகக் காண்பார். அதன் திசை வேகம் v எனவும் இருக்கும்.

எனவே S′ என்ற சட்டத்தில் எடுக்கப்பட்டுள்ள அளவுகளை S என்ற சட்டத்தில் எடுக்கப்பட்ட அளவுகளின் கோவைகளாக மாற்றலாம். இதற்கு vயின் குறியிலே மட்டும் தகுந்த மாற்றத்தை ஏற்படுத்த வேண்டும். நேர் திசையானல் + என்றும் எதிர்த் திசையானல் — என்றும் கொள்ள வேண்டும். மேற்கூறிய மாற்றங்களை ஒன்ருகக் கூறினல்,

$$\left.\begin{aligned} x &= x' - vt \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t' \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(5)$$

மற்றும்

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + vt \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t' \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(6)$$

சமன்பாடுகள் (5) மற்றும் (6) ஆகியனவே!

கேலிலியோவின் மாற்றுச் சமன்பாடுகள்
(Galilean Transformations)

இப்போது ஒரு பொருளின் திசை வேகத்தை S′ என்ற சட்டத்தில் நோக்குநர் அளப்பதாகக் கொள்வோம். இதனையே S என்ற சட்டத்தில் அளக்கப்பட்ட திசை வேகத்தின் வாயிலாக வெளியிடலாம்.

$$x' = x - vt$$

என்ற இச்சமன்பாட்டினை கால அடிப்படையில் வேறு படுத்திஞல் (differentiating)

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v$$

அல்லது $vx' = vx - v$ ...(7)

இதே போன்று, $y' = y$ என்பதனை வேறுபடுத்திஞல்

$$\frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt}$$

$$vy' = vy \quad ...(8)$$

மற்றும் $vz' = vz$ ...(9)

மேற்கூறிய கேலிலியோவின் மாற்றுச் சமன்பாடுகளும் (5 மற்றும் 6) திசைவேக மாற்றுச் சமன்பாடுகளும் (7, 8 மற்றும் 9) அவற்றிலிருந்து பெறப்படுவனவும் மிகவும் எளிதானவையும் எதிர்பார்ப்பது மானதாகவும் உள்ளன. ஆஞல் மேற்கூறிய இரு சமன்பாடுகளும் சிறப்புச் சார்பியல் கொள்கையின் முடிவுகளுக்கு முரணுக அமைகின்றன.

சார்பியல் கொள்கையின் முதல் எடுகோளின்படி, இயற்பியல் விதிகள் பொதுவானவை. எல்லா மேற்கோள் சட்டங்களிலும், இச் சட்டங்கள் சீரான திசை வேகத்தில் ஒரு சட்டத்தைச் சார்ந்து இயங்குவதாக இருந்தாலும், விதிகள் மாருமல் பொதுவானதாகவே இருக்கவேண்டும். ஆஞல் மின்னியல் மற்றும் காந்தவியலில் பயன்படும் அடிப்படைச் சமன்பாடுகளை ஒரு சட்டத்திலிருந்து மறு சட்டத்திற்கு கேலிலியோவின் மாற்றுச் சமன்பாடுகளைக் (5×6) கொண்டு

மாற்றும்போது அவ்வடிப்படைச் சமன்பாடுகளிலும் மாறுதல்கள் உண்டாகின்றன. எனவே மேற்கூறிய இயற்பியல் விதிகள் மேற்கோள் சட்ட மாற்றத்தில் வேறுபடுகின்றன. மேலும் சார்பியல் கொள்கையின் இரண்டாவது எடுகோளின்படி ஒளியின் திசைவேகம் எல்லாவித மேற்கோள் சட்டங்களிலும் ஒன்றுதான் என்பது தெரியும். அதனுல் ஒளியை உமிழும் மூலம் மற்றும் நோக்குநர் ஆகியவற்றின் திசை வேகத்திற்கும் ஒளியின் திசை வேகத்திற்கும் எவ்விதமான தொடர்பும் இல்லை என்பதும் தெளிவாகும். S என்ற சட்டத்தில் x அச்சின் நேர்திசையில் ஒளியின் திசை வேகம் c எனக் கொள்வோம். எனவே S′ என்ற சட்டத்தில் ஒளியின் திசை வேகத்தைக் காண சமன்பாடு (7) ஐ பயன்படுத்துவோம். அச்சமன்பாட்டின்படி ஒளியின் திசை வேகம் S′ என்ற சட்டத்தில்

$$c' = (c - v) \text{ ஆகும்.}$$

இம்முடிவு சார்பியல் கொள்கையின் இரண்டாம் அடிப்படை எடுகோளின் கருத்துக்கு முரணுக அமைகிறது.

எனவே நாம் கீழ்க்கண்ட ஓர் அனுமானத்தைப் (inference) பெறலாம்.

மைக்கல்சன்-மார்லி சோதனைத் தோல்வியின் பொருட்டு உண்டாக்கப்பட்டது, சிறப்புச் சார்பியல் கொள்கை. இக் கொள்கையின் அடிப்படை எடுகோள்களுக்கு மேற்சொன்ன கேலிலியன் நிலைமாற்றுச் சமன்பாடுகள் முரணுக அமைந்துள்ளன. எனவே, மேற்கூறிய அடிப்படை எடுகோள்களை நிறைவு செய்யக்கூடிய புதிய பிறிதொரு நிலை மாற்று சமன்பாடுகள் தேவை என்பது புலனுகிறது.

லோரண்ட்ஸ் மாற்றம் (Lorentz Transformation)

சிறப்புச் சார்பியல் கொள்கையின் எடுகோள்களை அடிப் படையாகக் கொண்ட ஒரு மாற்றச் சமன்பாடுகளின் கோவையை இப்போது உருவாக்கலாம். படம் (5) ஐ மேற்கோளாகக் கொள்வோம். இப்படத்தில் O′ என்ற தோற்றுவாய் கொண்ட S′ என்ற இயங்கு சட்டம் O என்ற தோற்றுவாய் கொண்ட S என்ற நிலைச் சட்டத்தைச் சார்ந்த v என்ற திசை வேகத்தோடு x திசையிலே இயங்கிக் கொண்டிருப்பதாகக் கொள்வோம். O மற்றும் O′ என்ற இரு தோற்றுவாய்களும் தொடக்கத்தில்

ஒரே புள்ளியில் இருப்பதாகக் கொண்டு கால அளவு பிற அளவு ஆகியவற்றை அளப்பதாகக் கொள்வோம்.

ஒரு நிகழ்ச்சி Sல் நடப்பதாகக் கொண்டால் இந்நிகழ்ச்சிக்கு ஒரே ஒரு தனிப்பட்ட விளக்கம் S' என்ற சட்டத்தில் இருக்க வேண்டும். பல்வேறுபட்ட விளக்கங்களும், அர்த்தங்களும் இருக்க வேண்டியதில்லை. எனவே வெளி ஆயங்கள் (space co-ordinates) மற்றும் காலங்கள் பற்றிய மாற்றச் சமன்பாடுகள் நேர் போக்குத் (linear) தன்மையுடையனவாக இருத்தல் வேண்டும். இத்தகையதொரு நேர் போக்குத் தொடர்பினை நாம் எளிதில் அனுமானிக்கலாம். அதன்படி xஐயும் x'யும் இணைக்கும் ஓர் எளிய நேர் போக்குச் சமன்பாடு

$$\boxed{x' = k\ (x - vt)} \quad \ldots(10)$$

k என்பது விகித மாறலி (pro-portionality constant). k மாறலி x மற்றும் t ஐ பொருத்து மாறுதல் அடையாது. ஆனால் kயின் மதிப்பு vயின் மதிப்பிற் கேற்ப மாறுதல் அடையலாம். ஒரு இயற்பியல் தோற்றப்பாட்டின் (physical phenomenon) புள்ள சமன்பாடுகளின் வடிவங்கள் S, S' என்ற இ களிலும் ஒரே மாதிரியானவை ஆகும். எனவே x மதிப்பை இயங்கு சட்டத்தில் x' மற்றும் t' வாயிலா போது v என்ற திசை வேகத்தின் திசையை மாற் குறியை மாற்றியும் ஏற்றுக் கொள்ளலாம். இ சட்டங்களுக்குமிடையேயுள்ள சார்பு இயக்கத் பாட்டை ஈடு செய்ய இயலும். ஆனால் k என்ற மதிப்பு இரண்டு மேற்கோள் சட்டங்களிலும் இருக்கும். எனவே

$$x = k\ (x' + vt)$$

நாம் x திசையிலேயுள்ள இயக்கத்தை மட்டுமே கண் காணிக்கிறோம். மேலும் y ஆயமும் z ஆயமும் v என்ற திசை கத்திற்குச் செங்குத்தாக உள்ளன. எனவே yy' மற்றும் zz' கிய ஆயங்களுக்கிடையே மாறுபாடுகள் ஏதும் இல்லை. எனவே,

$$y' = y \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots(12)$$

மற்றும் $z' = z \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots(13)$

க் கொள்ளலாம்.

ஆனல் கால ஆயம் t மற்றும் t' ஆகியன வேறுபடும். இவை ஒன்றுக்கொன்று சமமானவையல்ல. சமன்பாடு 10விருந்து x-ன் மதிப்பை, சமன்பாடு 11ல் பயன்படுத்தினல்

$$x = k\left[k(x - vt + vt'\right]$$

$$= k^2(x - vt) + kvt'$$

$$kvt' = k^2vt + x(1 - k^2)$$

$$t' = kt + \left(\frac{1 - k^2}{kv}\right)x \qquad ...(14)$$

சமன்பாடு எண்கள் 10, 12, 13 மற்றும் 14 ஆகியவை வெளிக்கால ஆயங்களுக்கான நிலை மாற்றங்களாகும். இவை சிறப்புச் சார்பியல் கொள்கையின் முதல் எடுகோளுக்கு இணங்கியதாக அமைந்துள்ளன.

இரண்டாம் எடுகோளைக் கொண்டு k என்ற மாறிலியின் ா எளிதில் கண்டு கொள்ளலாம். ஒரு ஒளிசைகை ட $t = 0$ என்ற நிலையில் இரு சட்டங்களில் இணைந்து இருக்கும் $(0 = 0')$ நொடியில் தோன்றுவதாகக் ம். ஒளியின் திசைவேகம் (C) எல்லா நோக்குநர்க்கும் சகளிலும் ஒன்றுகவே தோன்றும். மேலும் அவர்கள் லயில் இருந்தபோதிலும் ஒளியின் திசைவேகம் தான் இருக்கும். ஒவ்வொரு நோக்குநரும் விரிந்து ம் கோளவடிவ ஒளி அலைமுகத்தின் (wave front] இருப்பதாக எண்ணுவர். அவர்களை மையமாகக் ஒளி c செமீ/விநாடி என்ற திசை வேகத்தில் ந் நோக்குநரைச் சார்ந்து செல்வதாக எண்ணுவீர். ற சட்டத்தில் O என்ற தோற்றுவாயில் உள்ள நோக்கு க்கு ஒளிச்சைகை x திசையிலே குறிப்பிட்ட காலம் tயில் சென்ற தூரம்

$$x' = ct \qquad ...(15)$$

எனலாம் ஆனல் O′ என்ற தோற்றுவாயில் உள்ள நேக்குநர்க்கு $x' = ct'$ எனத் தோன்றும்.........16 x' மற்றும் t', ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை முறையே 10 மற்றும் 14 ஆகிய சமன்பாடு களிலிருந்து எடுத்துக்கொண்டு அவற்றைச் சமன்பாடு 16ல் பயன்படுத்தினல்

$$k(x - vt) = c\left[kt + \left(\frac{1-k^2}{kv}\right)x\right]$$

என்ற சமன்பாட்டைப் பெறலாம்.

அல்லது, $$kx - \left(\frac{1-k^2}{kv}\right)cx = ckt + vkt$$

$$x = \frac{ckt + vkt}{k - \left(\frac{1-k^2}{kv}\right)c}$$

அல்லது $$x = \frac{ckt\left(1 + \frac{v}{c}\right)}{k\left[1 - \left(\frac{1-k^2}{k^2}\right)\frac{c}{v}\right]}$$

அல்லது $$x = \frac{ct\left(1 + \frac{v}{c}\right)}{1 - \left(\frac{1}{k^2} - 1\right)\frac{c}{v}} \qquad ...(17)$$

ஆனால் சமன்பாடு 15ன்படி

$x = ct$ ஆகும்

இவையிரண்டிலிருந்து சமன்பாடுகள் 15 மற்றும் 17

$$\frac{\left(1 + \frac{v}{c}\right)}{1 - \left(\frac{1}{k^2} - 1\right)\frac{c}{v}} = 1$$ எனப் பெறலாம்.

அல்லது

$$\left(1 + \frac{v}{c}\right) = 1 - \frac{c}{v}\cdot\frac{1}{k^2} + \frac{c}{v}$$

$$\frac{v}{c} = -\frac{c}{v}\cdot\frac{1}{k^2} + \frac{c}{v}$$

$$\frac{c}{v}\cdot\frac{1}{k^2} = \frac{c}{v} - \frac{v}{c} = \frac{c^2 - v^2}{vc}$$

$$\frac{1}{k^2} = \frac{c^2 - v^2}{c^2}$$

$$k^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2}$$ அல்லது

$$k = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{c}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad ...(18)$$

இங்கு $\beta = \frac{v}{c}$ எனக் கொள்ளலாம்.

K என்ற மாறிலியின் சமன்பாடு 18ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்பினைச் சமன்பாடுகள் 10, 14 ஆகியவற்றில் பயன்படுத்தினல் நாம் லோரண்ட்ஸ் மாற்றுச் சமன்பாடுகளை முழுமையாகப் பெறலாம். அவை பின்வருமாறு.

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ \text{மற்றும்}\quad t' &= \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned}\right\} \quad ...(19)$$

t' யின் மதிப்பைப் பெற கீழ்க் கண்ட முறையைப் பின்பற்றுவது சிறப்பாக அமையும்.

சமன்பாடு 14ஐக் கொண்டு

$$t' = kt + \left(\frac{1 - k^2}{kv}\right) x$$

$$= k\left[t - \left(\frac{k^2 - 1}{k^2}\right)\frac{x}{v}\right]$$

$$= k\left[t - \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\frac{x}{v}\right]$$

ஆனால் $k = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

அல்லது $\dfrac{1}{k^2} = (1 - \beta^2)$

எனவே $t' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}\left[t - \left(1 - 1 + \dfrac{v^2}{c^2}\right)\dfrac{x}{v}\right]$

அல்லது $t' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}\left(t - \dfrac{vx}{c^2}\right)$

$$t' = \frac{t - \dfrac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

S′ என்ற இயங்கு சட்டத்தில் உள்ள அளவுகளை S என்ற நிலைச் சட்டத்திற்கு மாற்ற வேண்டுமானால் திசை வேகம் $+v$க்கு மாறாக $-v$ எனக் கொள்ளவேண்டும். எனவே நமக்கு நேர் மாறான (inverse) லோரண்ட்ஸ் மாற்றச் சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன. அவை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

மற்றும்

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y &= y' \\ z &= z' \\ \text{மற்றும்}\quad t &= \left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)\Big/\sqrt{1 - \beta^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots(20)$$

மேற்கூறிய லோரண்ட்ஸ் மாற்றச் சமன்பாடுகளில் இரண்டு குறிப்பிடத்தக்க தன்மைகள் உள்ளன. அவைகளாவன.

(i) காலத்தை அளத்தலும் மற்றும் ஒரு பொருளின் நிலையை அளத்தலும் நோக்குநர், மேற்கொண்டுள்ள சட்டத்தைப் பொருத்ததேயாகும். எனவே இரண்டு நிகழ்ச்சிகள் ஏக காலத்தில ஒரு சட்டத்தில் நிகழ்வதாகக் கொண்டால் அதே நிகழ்ச்சிகளை வேறு சட்டத்திலிருந்து நோக்கும்போது ஏக காலத்தில் நிகழ்வதாக இருக்கவேண்டிய அவசியம் இல்லை.

(ii) S' என்ற இயங்கு சட்டத்தின் S என்ற நிலைச் சட்டத்தைச் சார்ந்த சார்பு திசை வேகம் v எனக் கொண்டோம். இத்திசை வேகமானது (v) ஒளியின் திசை வேகமாகிய (c)யுடன் ஒப்பிடும்போது vயானது மிகவும் குறைந்து இருந்தால் K என்ற மாறிலியின் மதிப்பு ஒன்றுக்குச் சமமாகும். இதனால் லோரண்ட்ஸின் சார்பியல் மாற்றுச் சமன்பாடுகள் சாதாரண கேலிலியோவின் சமன்பாடுகளாக எளிய வடிவமெடுக்கின்றன. அதாவது

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \text{ மற்றும்} \\ t' &= t \end{aligned}\right\} \quad \ldots(21)$$

சார்பியல் கொள்கையின் முக்கியத்துவம் ஒளியை ஒப்ப திசை வேகங்களைப் பயன்படுத்தும்போது மட்டும் வெளிப்படுவதாக உள்ளது தெளிவாகிறது.

2. 2. சிறப்புச் சார்பியல் கொள்கையின் அடிப்படை எடுகோள்கள்

எடுகோள்—I

ஒரு மேற்கோள் சட்டம் மற்றொரு மேற்கோள் சட்டத்தைச் சார்ந்து சீரான திசை வேகத்தில் இயங்கிக் கொண்டிருக்கும் பொழுது, இயற்கை விதிகள் அத்துணையும் எல்லா மேற்கோள் சட்டங்களிலும் ஒரே வடிவங் கொண்டனவாகவும் இருக்கின்றன.

எடுகோள்—II

இயல்பு வெளியிலே (free space) ஒளியின் திசை வேகம் எல்லா நோக்குநர்களுக்கும் ஒன்றாகத்தான் இருக்கும். இந்த ஒளித் திசைவேகம் ஒளி மூலம் அல்லது நோக்குநர் ஆகிய வற்றின் திசை வேகத்தைப் பொருத்தது அல்ல

மைக்கல்சன்-மார்லியின் பரிசோதனையின் விளைவு, பிற ஒளியியல் பரிசோதனைகள் மற்றும் ரோமரின் (Romer's) வியாழனின் (Juriter) துணைக் கோள்களைப் (satellite) பற்றிய வானியல் காட்சிப் பதிவுகள் (astronomical observa ions) ஆகியவற்றின் முடிவுகளைக் கொண்டு இரண்டாம் எடுகோள் எழுந்தது என நம்பலாம். இரண்டாம் எடுகோள் முதல் எடுகோளை விட முக்கியத்துவம் வாய்ந்தது, இது பரிசோதனை மூலம் வெளியிடப்பட்ட உண்மையைப் பறைசாற்றுவதாக அமைந்துள்ளது. மேலும் மிகத் தொன்மையான கொள்கைகளை விட்டு புதிய கொள்கைகளைப் புகுத்துகிறோம். இச்செயல் இரண்டாம் எடுகோளால் விளைந்தது எனலாம்.

முதல் எடுகோள் நமக்கு ஓர் உண்மையினை எடுத்து இயம்புவதாக அமைந்துள்ளது. தனிப்பட்ட சிறப்பு வாய்ந்த நிலையான ஒரு மேற்கோள் சட்டத்தை பெறுவது என்பது இயலாத செயல் ஆகும். எனவே ஈதரை நிலையாகவும் சார்புப் படுத்தியும் ஓர் இயக்கத்தை அளக்கக்கூடிய ஒரு பரி சோதனையைச் செய்தல் இயலாத செயலாகும். குறைந்த பட்சம், ஒரு மேற்கோள் நிலைச் சட்டத்தில் உள்ள ஒளியியல் விதிகளா வன இயங்கு தொகுதியில் உள்ள விதிகளுக்கு மாறுபட்டதாக அமைய வேண்டும். (ஒளியின் திசை வேகம் திசைக்கு ஏற்ப மாறுவதில்லை; ஏனெனில் இவ்வொளியானது முன்பே ஒரு இயங்கு சட்டத்தில் உள்ளது.) எனவே, இவ்வாறு தனிச் சிறப்புக் கொண்ட ஒரு தொகுதியை அடைய இயலாது. எல்லாத் தொகுதிகளும் சீர்திசை வேகத்தோடு இயங்கும்போது அவற்றிற்கெல்லாம் ஒரே அடிப்படைத் தன்மைகளே உண்டு. எனவே நாம் சார்பிலா இயக்கத்தைப் பற்றி கருத்து பரிமாறிக் கொள்ள முடியாது அனைத்து இயக்கங்களும் சார்புடையனவே. தனியான இயக்கங்களே உலகில் இல்லை.

மேற்கூறிய இரு எடுகோள்களின் முக்கியத்துவம் எண்ணிப் பார்க்க இயலாது. சில சமயம் இவை நமக்குப் பெரிய அதிர்ச் சியைத் தருவதாகவும் அமையும். ஏனெனில் நாம் வாழும் உலகில் பல பொருட்களின் வேகங்கள் ஒளியின் வேகத்தோடு ஒப்பிடும்

போது மிகவும் குறைவானவையே. எனவே, நம்ப முடியாத பல முடிவுகளையும் நாம் காண உள்ளோம். ஆனால் அவை உண்மையெனவும் நாமே ஒப்புக் கொள்ளப் பல சான்றுகளும் உள்ளன.

2. 3. லோரண்ட்ஸ் நிலைமாற்றுச் சமன்பாடுகள் (Lorentz Transformation Equation)

சென்ற பிரிவிலே சிறப்புச் சார்பியல் கோட்பாட்டின் எடுகோள்களைப் பற்றிப் பார்த்தோம். முதல் எடுகோளை நியூட்டனின் விசையியலின் முடிவுகளின் மீட்சியாகவே கருதலாம். மேலும் கேலிலியன் மாற்றங்களிலே ஒளியின் வேகத்தை மாறிலியாகக் (constant) கொள்ளவில்லை. கேலிலியன் மாற்றச் சமன்பாடுகளின் அடிப்படையில் நோக்கினால் சார்பியல் கொள்கையின் இரண்டாம் எடுகோள் உண்மையானதாக இருக்க இயலாது. உண்மையில் ஒளியின் திசை வேகம் எவ்வழி முறையில் சோதனை செய்து பார்த்தாலும் அது ஒரு மாறிலியாகவே இருக்கிறது என்பதை நாமறிவோம். எனவே இரண்டாம் எடுகோள் மிகவும் முக்கியத்துவம் வாய்ந்த ஒன்றாகும். இந்த ஓர் அடிப்படை எடுகோள்தான் மிகப் பழைய கோட்பாட்டினையும் ஐன்ஸ்டைனின் சார்பியல் கோட்பாட்டினையும் வேறுபடுத்திக் காட்டக்கூடிய வல்லமை பெற்றதாகும். மேலும் ஐன்ஸ்டைன் அவர்களின் கருத்துப்படி இச் சார்பியல் கொள்கை, ஒளியியல் விதிகளுக்கு (law of optics) பொருந்துவதாக அமையும் என்பது தெளிவாகிறது.

ஆகையினால் ஒளியின் திசைவேகம் ஒரு மாறிலி என்பதை மனத்தில் பதியவைக்க வேண்டுதல் தேவையாகும். இத்தன்மையை நிலை நிறுத்த புதிய மாற்றுச் சமன்பாடுகளில் சில சிறப்புத் தன்மைகளைப் புகுத்தல் தேவை.

1. எல்லா வகை நிலைமச் சட்டங்களிலும் (inertial frames) ஒளியின் திசை வேகம் C என்பது ஒரு மாறிலியாக இருக்க வேண்டும்.

2. நிலை மாற்றங்கள் (transformations) நேரியல் (linear தன்மை கொண்டனவாக இருக்க வேண்டும்.) அதாவது $v << c$ ஆக இருக்கும் போது இச் சமன்பாடு கேலிலியன் மாற்றுச் சமன்பாடாக அமையும்.

3. இவை யாவும் கீழ்க்கண்டவற்றை அடிப்படையாகக் கொண்டிருக்கக் கூடாது,

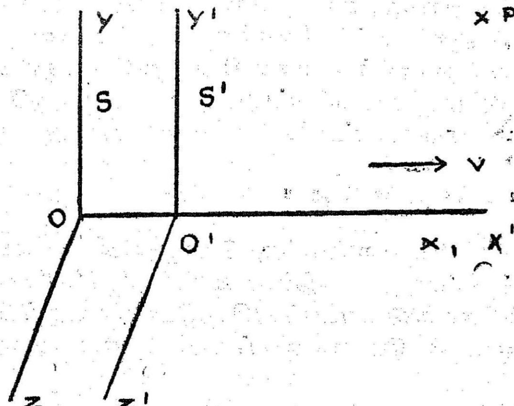
(a) தனிவெளி (absolute space)

(b) தனிக்காலம் (absolute time)

இவற்றை மனத்தில் கொண்டு லோரண்ட்ஸ் நிலைமாற்றச் சமன்பாடுகளை வரவழைப்போம்,

லோரண்ட்ஸ் நிலைமாற்றச் சமன்பாடுகள்

H. A. லோரண்ட்ஸ் என்பார் இச்சமன்பாடுகளை அமைத்தார். இரண்டு வேறுபட்ட நிலைம மேற்கோள் தொகுதிகளில் உள்ள, இருவரின் காட்சிப் பதிவுகளை (observations) அடிப்படையாகக் கொண்டு தமது லோரண்ட்ஸ் சமன்பாடுகளைப் படைத்தார். இச்சமன்பாடுகள் மேற்கூறிய தன்மைகளை நிறைவு செய்வதாகவும் அமைந்துள்ளது. இதன் முக்கிய சிறப்பாகும்.



படம் 6. நிலைமத் தொகுதி (Inertial frames)

S மற்றும் S′ என்ற இரு நிலைம மேற்கோள் சட்டத்தொகுதிகளை எடுத்துக்கொள்வோம். இதில் S என்பது நிலையானது, S′ என்பது Sஐச் சார்ந்து v என்ற திசை வேகத்திலே இயங்கக் கூடியதாகும்.

O மற்றும் O′ என்ற இரு நோக்குநர்கள் (observers) ஒரு நிகழ்ச்சி Pயை முறையே S மற்றும் S′ என்ற தொகுதிகளிலிருந்து

காட்சிப் பதிவு செய்வதாகக் கொள்வோம். தொடக்கத்தில் இரு தொகுதிகளின் X அச்சு இணைந்து ஒரு புள்ளியில் O மற்றும் O′ இருப்பதாகக் கொள்வோம். பின்னர் S ஆனது v என்ற திசை வேகத்திலே X அச்சிற்கு இணையாக இயங்குவதாகக் கொள்வோம். P என்ற நிகழ்ச்சி $t = t' = 0$ என்ற நிலையிலே நடைபெறுவதாகக் கொள்வோம். ஒளிச் சைகை பிறப்பிக்கப்பட்டு பரவுவதையே ஈண்டு நிகழ்ச்சி எனக் கொள்கிறோம். இரண்டு தொகுதிகளின் ஆதிகள் O மற்றும் O′ (origins) ஒரே புள்ளியில் இணைந்திருக்கும் நிலையில் $t = t' = 0$ என்று நிலையில் நிகழ்ச்சி நடைபெறுகிறது. இந்நிகழ்ச்சியை S என்ற நிலைத்தொகுதியில் உள்ள நோக்குநோர் (x, y, z, t) என்ற ஆயக் கூறுகளைக் கொண்டு கண்டு கொள்வார். இதே நிகழ்ச்சியை S′ என்ற இயங்கு தொகுதியில் உள்ள O′ என்ற நோக்குநர் (x', y', z') என்ற ஆயக் கூறுகளைக் கொண்டு கண்டு கொள்வார்.

S தொகுதியின் ஆதியிலே $t=0$ என்ற காலத்திலே ஒளிச் சைகை (light signal) பிறப்பிக்கப்பட்டு அது ஒரு வளரும் கோளமாகப் பரவுவதாகக் கொள்வோம். அலை முகத்தின் (wave front) ஆரம் cயின் வேகத்திற்கு ஏற்ப வளரும். மேலும் $(x, y, z, t,)$ என்ற ஆயக் கூறுகள் O என்ற நோக்குநரால் S என்ற நிலைத்தொகுதியில் பெறப்பட்டதாகும். ஆதலினாலே கோளப் பரப்பிற்கான சமன்பாட்டினைக் கீழேயுள்ளவாறு அமைக்கலாம்.

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \qquad ...(1)$$

இதே போன்று S′ என்ற இயங்கு தொகுதியில் உள்ள நோக்குநர் O′ என்பார் P என்ற நிகழ்ச்சியை (x', y', z', t') என்ற ஆயக் கூறுகளைக் கொண்டு காட்சிப் பதிவு செய்வார். இத் தொகுதியில் ஒளி பரவுதலின் கோளவடிவப் பரப்பிற்கான சமன்பாட்டினை

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \qquad ...(2)$$

என்ற கோடிட்ட (primed) ஆயக்கூறுகளை வைத்து அமைக்கலாம்.

c என்ற கணியத்திற்குக் கோடிடவில்லை. ஏனெனில் c யானது ஒளியின் திசைவேகமாகும். சிறப்புச் சார்பியல் கோட்பாட்டின்படி இது ஒரு மாறிலி (constant) ஆகும் என்பதை நினைவில் கொள்ள வேண்டும். ஆகவே, c என்பது எல்லா நிலைம மேற்கோள் சட்டத் தொகுதிகளிலும் ஒரே மதிப்புடையதாகும்.

மேலும் S'யின் திசைவேகம் x அச்சிற்கு இணையாகவும் உள்ளது. மேலும் சமச்சீர் (symmetry) அடிப்படையில்,

$$\left.\begin{aligned} y &= y' \\ \text{மற்றும்} \quad z &= z' \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(3)$$

எனக் கொள்ளலாம்.

சமன்பாடு எண் 1 மற்றும் 2 ஆகியவற்றிலிருந்து

$$x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2 \qquad \ldots(4)$$

என அமைக்கலாம்.

இப்போது x மற்றும் x' ஆகியவற்றிற்கிடையே தொடர்பு ஏற்படுத்தும் நிலைமாற்றுச் சமன்பாடுகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு அமைக்கலாம்.

$$x' = K(x - vt) \qquad \ldots(5)$$

K என்பது x மற்றும் t ஐப் பொருத்தது அன்று.

இச் சமன்பாட்டை நாம் எடுத்துக் கொண்டு முயற்சி செய்வதற்கு இரு காரணங்கள் அடிப்படையாக உள்ளன.

1. vயின் குறைந்த வேகத்திற்கு மேற்கூறிய சமன்பாடும், கேலிலியன் நிலைமாற்றச் சமன்பாடுகளும் (Galilean transformation equations) ஒன்றாகவே அமையும்.

அதாவது, வேகம் $\dfrac{v}{c} \longrightarrow 0$

2. மேற்கூறிய நிலை மாற்றம் எளியது, மற்றும் நேரியல் (linear) தன்மையுடையது; எனவே சமன்பாடு எண் 5 மேற்கூறிய நிபந்தனைகளை பொதுவாக நிறைவு செய்வதாக உள்ளது.

இங்கு இயக்கமானது சார்பு இயக்கமாக (relative motion) உள்ளது. இங்கு S' என்ற தொகுதி Sஐச் சார்ந்த v என்ற திசை வேகத்தில் செல்வதாகக் கொள்வோம். மேலும் S' என்பதை நிலையாக்கியும் இதனைக் கூறலாம். S என்ற தொகுதி S'ஐச் சார்ந்து $(-v)$ என்ற திசை வேகத்திலே இயங்கி X அச்சின் நேர் திசையிலே செல்வதாகவும் கொள்ளலாம்.

$$\therefore \quad x = K' \; (x' + vt') \qquad \ldots(6)$$

சமன்பாடு 5லிருந்து x'ன் மதிப்பை சமன்பாடு 6ல் பதிலீடு செய்வோம்.

$$x = K' \left[K(x - vt) + vt' \right]$$

அல்லது $\dfrac{x}{K'} = Kx - Kvt + vt'$

$$\therefore \quad vt' = \frac{x}{K'} + Kvt - Kx$$

$$= K\left[\frac{x}{KK'} + vt - x \right]$$

$$\therefore \quad t' = K \left[t + \frac{x}{vKK'} - \frac{x}{v} \right]$$

$$= K\left[t - \frac{x}{v}\left(1 - \frac{1}{KK'}\right) \right] \qquad \ldots(7)$$

x'இன் மதிப்பைச் சமன்பாடு எண் 5ல் இருந்தும், t'இன் மதிப்பைச் சமன்பாடு எண் 7ல் இருந்தும் எடுத்து சமன்பாடு எண் 4ல் பதிலீடு செய்வோம்.

$$x^2 - c^2 t^2 = K^2 (x - vt)^2$$

$$- c^2 K^2 \left[t - \frac{x}{v} \left(1 - \frac{1}{KK'}\right) \right]^2$$

அல்லது

$$x^2 - c^2 t^2 - K^2 (x^2 - 2vxt + v^2 t^2)$$

$$+ c^2 K^2 \left[t - \frac{x}{v} \left(1 - \frac{1}{KK'}\right) \right]^2 = 0$$

அல்லது

$$x^2 - c^2 t^2 - K^2 (x^2 - 2vxt + v^2 t^2) +$$

$$c^2 K^2\left[t^2 - \frac{2xt}{v}\left(1 - \frac{1}{KK'}\right) + \frac{x^2}{v^2}\left(1 - \frac{1}{KK'}\right)^2\right] = 0 \qquad ...(8)$$

மேற்கூறிய சமன்பாடு எண் 8 சர்வசமமாக (identity) இருப்பதால் x^2 மற்றும் t^2 ஆகியவற்றின் கெழுக்கள் (coefficient) தனித்தனியே மறைய (vanish) வேண்டியுள்ளன.

x^2 கெழு : [x^2-ன் குணகங்களை எடுக்க]

$$1 - K^2 + \frac{c^2 K^2}{v^4}\left(1 - \frac{1}{KK'}\right)^2 = 0$$

அல்லது

$$1 - K^2 + \frac{c^2}{v^2}\left(K^2 - \frac{2K}{K'} + \frac{1}{K'^2}\right) = 0 \qquad ...(9)$$

xt கெழுவை சுழிக்குச் சமப்படுத்தினால்,

$$2K^2 v + c^2 K^2\left\{-\frac{2}{v}\left(1 - \frac{1}{KK'}\right)\right\} = 0$$

அல்லது

$$2 K^2 v - \frac{2 c^2 K^2}{v}\left(1 - \frac{1}{KK'}\right) = 0$$

அல்லது

$$(v^2 - c^2) KK' + c^2 = 0 \qquad ...(10)$$

t^2யின் கெழுக்களைச் சுழிக்குச் சமப்படுத்தினால்,

$$-c^2 - K^2 v^2 + c^2 K^2 = 0$$

$$(v^2 - c^2) K^2 + c^2 = 0 \qquad ...(11)$$

சமன்பாடு எண்கள் 10 மற்றும் 11 ஆகியவைகளிலிருந்து

$K = K'$ என்பதைப் பெறறாம்.

ஆகையால் சமன்பாடு எண் 11லிருந்து

$$k^2 = \frac{-c^2}{v^2 - c^2} = \frac{c^2}{c^2 - v^2} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\therefore K = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} \quad \ldots(12)$$

மேலும் $\frac{v}{c} = \beta$ எனக் கொண்டால்

$$K = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)}}$$ எனவும் சமன்பாடு

எண் 12ஐ அமைக்கலாம்.

சமண்பாடு எண் 5ல் இருந்து

$$x' = K(x - vt) \quad \ldots(13)$$

மேலும் சமன்பாடு எண் 7லிருந்து

$$t' = K\left[t - \frac{x}{v}\left(1 - \frac{1}{K^2}\right)\right] \quad \because K = K'$$

$$= K\left[t - \frac{x}{v}\left\{1 - \left(\frac{c^2 - v^2}{c^2}\right)\right\}\right]$$

சமன்பாடு எண் 12ல் இருந்து

$$t' = K\left[t - \frac{v^2 x}{vc^2}\right] \quad \ldots(14)$$

சமன்பாடு எண் 12லிருந்து Kயின் மதிப்பை எடுத்து சமன்பாடு எண் 13 மற்றும் 14ல் பதலீடு செய்வோம்

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ t' &= \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots(15)$$

மேலும் சமன்பாடு எண் 3 மற்றும் 15 ஆகியவற்றைச் சேர்த்தால் கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளைப் பெறலாம்.

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ \text{மற்றும்} \quad t' &= \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}\right\} \quad ...(16)$$

இவற்றிற்கு லோரண்ட்ஸ் நிலை மாற்றச் சமன்பாடுகள் (Lorentz Transformation Equations) என்று பெயர்.

$\beta = \frac{v}{c}$ என்ற மதிப்பினைப் பயன்படுத்தினல்

$K = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ என்று ஆகும். இதனைச் சமன்பாடு

எண் 16ல் பதிலீடு செய்தால்,

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{(1 - \beta^2}} = K(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ \text{மற்றும்} \; t' &= \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{(1 - \beta^2)}} = K\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \end{aligned}\right\} \quad ...(17)$$

லோரண்ட்ஸ் நிலைமாற்றச் சமன்பாடுகளை இவ்வாறும் வெளிப் படுத்தலாம்.

மேற்கூறிய சமன்பாடுகளைப் (16 மற்றும் 17) பயன் படுத்தி S என்ற தொகுதியிலிருந்து S′ என்ற தொகுதிக்கு நிலைமாற்றங்களைப் பெறலாம். S′ இல் இருந்து S க்கு மாற்றக் கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகள் பயனுள்ளவையாக இருக்கும்.

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{(1-\beta^2)}} \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{(1-\beta^2)}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots(18)$$

மேலும் $K = \dfrac{1}{\sqrt{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ என்பதைப் பதிலீடு செய்தால்

$$\left.\begin{aligned} x &= K(x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= K\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots(19)$$

என்ற இந்தச் சமன்பாடுகளைப் பெறலாம்.

சமன்பாடு எண்கள் 18 மற்றும் 19 ஆகியவற்றை "நேர் மாறான (inverse) லோரண்ட்ஸ் நிலை மாற்றுச் சமன்பாடுகள்" என்றழைப்பர்.

லோரண்ட்ஸ் நிலைமாற்றச் சமன்பாடுகள் ஒரு குலத்தைச் சேர்ந்தவை

தேற்றம் : லோரண்ட்ஸ் நிலைமாற்றச் சமன்பாடுகள் ஒரு குலத்தை அல்லது குழுவைச் (group) சேர்ந்தவை என்பதனை நிரூபித்தல். அல்லது,

அடுத்தடுத்து செய்யப்படுகின்ற லோரண்ட்ஸ் நிலை மாற்றம் மீண்டும் லோரண்ட்ஸ் சமன்பாடுகளையே தருவதாக உள்ளன. அல்லது

லோரண்ட்ஸ் நிலை மாற்றச் சமன்பாடுகள் குழுத் தன்மையைக் கொண்டன என்பதனைக் காட்டுதல்.

நிரூபணம் : மேற்கூறிய தேற்றத்தை நிரூபிக்க அடுத்தடுத்த இரண்டு லோரண்ட்ஸ் மாற்றத்தின் விளைவு லோரண்ட்ஸ் சமன் பாடுதான் எனக் காட்டுவதால் நிறைவு பெறும்.

S, S′, S″ என்ற மூன்று மேற்கோள் சட்டங்களை எடுத்துக் கொள்வோம். S′ என்ற சட்டம் நிலையாகவுள்ள Sஐச் சார்ந்து x திசையிலே v என்ற திசை வேகத்திலே இயங்கி விலகிச் செல்வதாகக் கொள்வோம். S″ என்ற சட்டம் S′ஐச் சார்ந்து v' என்ற திசை வேகத்திலே x திசையிலே இயங்கி விலகிச் செல்வதாகக் கொள்வோம். லோரண்ட்ஸ் நிலைமாற்றச் சமன் பாடுகளினால் S மற்றும் S′ என்ற இரு சட்டத்திற்கும் இடைப்பட்ட தொடர்பினைக் கீழ்க்கண்டவாறு வெளிப் படுத்தலாம்.

$$\left.\begin{aligned} x' &= K(x - vt); \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= K\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(20)$$

இங்கு $K = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$ ஆகும்.

அதேபோன்று S′ மற்றும் SS″ சட்டங்களுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பினை,

$$\left.\begin{aligned} x'' &= K'(x' - v't) \\ y'' &= y' \\ z'' &= z' \\ t'' &= K'\left(t' - \frac{v'x'}{c^2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(21)$$

எனவும் வெளிப்படுத்தலாம்.

இங்கு $K' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$ ஆகும்.

மற்றும் v' ஆகியவற்றின் திசைவேகத் தொகுபயனை (resultant) v' ஐக் கொள்வோம்.

$$v'' = \frac{v + v'}{1 + \dfrac{vv'}{c^2}} \qquad ...(22)$$

S ஐச் சார்ந்த S″ தொகுதியின் திசை வேகம் $= v''$

$K'' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v''^2}{c^2}}}$ எனக் கொள்ள

கீழ்க்கண்டவாறு ஒரு தொடர்பினைக் காட்டுதல் வேண்டும்,

$$\left.\begin{aligned} x'' &= K''\,(x - v''\,t) \\ y'' &= y \\ z'' &= z \\ t'' &= K''\left(t - \frac{v''\,x}{c^2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad ...(23)$$

அவ்வாறு செய்தால் வேண்டிய குறிக்கோளை அடைவதாக அமையும்.

$$\frac{1}{K''^2} = 1 - \frac{v''^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{v + v'}{1 + \dfrac{vv'}{c^2}}\right)^2$$

$$= \frac{c^2\left(1 + \dfrac{vv'}{c^2}\right) - (v + v')^2}{c^2\left(1 + \dfrac{vv'}{c^2}\right)^2}$$

$$= c^2 + 2vv' + \frac{v^2 v'^2}{c^2}$$

$$- (v^2 + v'^2 + 2vv') \Big/ c^2 \left(1 + \frac{vv^2}{c^2}\right)^2$$

$$= c^2 \left[1 + \frac{v^2 v'^2}{c^4} - \frac{v^2}{c^2} - \frac{v'^2}{c^2}\right] \Big/ c^2 \left(1 + \frac{vv'}{c^2}\right)^2$$

$$= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right) \Big/ \left(1 + \frac{vv'}{c^2}\right)^2$$

அல்லது $K'' = \left(1 + \frac{vv'}{c^2}\right) \Big/ \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \sqrt{\left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)}$

$$= KK' \left(1 + \frac{vv'}{c^2}\right)$$

எனவே $K'' = KK' \left(1 + \frac{vv'}{c^2}\right)$

$$= KK' \left(1 + \frac{vv'}{c^2}\right) \quad ...(24)$$

சமன்பாடு 21ஐ 20 உதவியோடு கீழ்க்கண்டவாறு அமைக்கலாம்.

$$x'' = K' \ (x' - v' t')$$

$$= K' \left[K (x - vt) - v' \ k \left(t - \frac{v \ x}{c^2}\right)\right]$$

$$= K'K \left[x \left(1 + \frac{vv'}{c^2}\right) - t (v + v')\right]$$

$$= K'K \left(1 + \frac{vv'}{c^2}\right) \left[x - \frac{(v + v')}{\left(1 + \frac{vv'}{c^2}\right)} t\right]$$

$= K'' (x - v'' t)$ (சமன்பாடு 24லிருந்து)

$$x'' = K'' (x - v'' t)$$

மீண்டும் சமன்பாடுகள் 21 மற்றும் 20ல் இருந்து

$$t'' = K' \left(t' - \frac{v' x'}{c^2} \right)$$

$$= K \; K' \left[K\left(t - \frac{v x}{c^2} \right) - \frac{v'}{c^2} K (x - vt) \right]$$

$$= K' K \left[t \left(1 + \frac{v v'}{c^2} \right) - \frac{x}{c^2} (v + v') \right]$$

$$= K' K \left(1 + \frac{v v'}{c^2} \right) \left[t - \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}} \cdot \frac{x}{c^2} \right]$$

$$t'' = K'' \left(t - v'' \frac{x}{c^2} \right)$$ (சமன்பாடு 24 காரணமாக)

$$y'' = y; \quad y' = y; \quad \therefore \; y'' = y$$

$$z'' = z; \quad z' = z; \quad \therefore \; z'' = z$$

ஆகவே, புதிய லோரண்ட்ஸ் நிலை மாற்றச் சமன்பாடுகளை கீழேயுள்ளவாறு அமைக்கலாம்.

$$\left. \begin{aligned} x'' &= K'' \; (x - v'' t) \\ y'' &= y \\ z'' &= z \\ t'' &= K'' \left(t - \frac{v'' x}{c^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad \ldots(25)$$

எனவே, சமன்பாடு 23ல் காட்டியபடி முடிவினைப் பெற்றுள்ளோம். ஆதலின் தேற்றமானது நிரூபிக்கப்பட்டுள்ளது என்று கூறலாம்.

இரு நிலைமாற்றுச் சமன்பாடுகள் ஒற்றுமை

லோரண்ட்ஸ் நிலை மாற்றச் சமன்பாட்டில் v குறைந்த மதிப்பை கொண்டிருக்கும்போது லோரண்ட்ஸ் நிலை மாற்றச் சமன்பாடுகள் கேலிலியன் சமன்பாட்டைப் போன்று அமையும் என்பதனைக் கீழ்க்கண்டவாறு விளக்கலாம்.

லோரண்ட்ஸ் நிலை மாற்றுச் சமன்பாட்டின்படி

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \\ y' &= y \\ z' &= z \\ \text{மற்றும்} \quad t' &= \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} \end{aligned}\right\} \quad ...(26)$$

சமன்பாடு எண் 26ல் vஐ சிறிய அல்லது குறைந்த மதிப்புடையதாகக் கொள்வோம்.

அல்லது $v << c$ ஆகவே, $\frac{v}{c} \rightarrow 0$

பிறகு சமன்பாடு 26ல் இருந்து

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z &= z \\ \text{மற்றும்} \quad t' &= t \end{aligned}\right\} \quad ...(27)$$

என்ற சமன்பாடு எண் 27 ஐப் பெறுகிறோம். சமன்பாடு எண் 27 கேலிலியன் மாற்றுச் சமன்பாடுகளாக உள்ளதை நாம் காணலாம்.

லோரண்ட்ஸின் நிலைமாற்றுச் சமன்பாடுகளின் சிறப்புப் பயன்கள்

(a) லோரண்ட்ஸ் நிலைமாற்றுச் சமன்பாடுகளிலிருந்து பிரனல்ஸ் (Fresnel's) ஈதர் இழுவைக் குணகத்திற்கான கோவையை வருவிக்கும் வழிமுறை.

S மற்றும் S′ என்ற இரு நிலைமத் தொகுதிகளை எடுத்துக் கொள்வோம். S′ என்ற இயங்குத்தொகுதி Sஐ நிலையாகக் கொண்டு v என்ற திசை வேகத்திலே x ஆயத்திசையிலே இயங்கி விலகிச்சென்று கொண்டிருப்பதாகக் கொள்வோம்.

நீரின் ஒளிவிலகல் எண் $= \mu$ எனக் கொள்வோம். நமது பரிசோதனைச் சாலையை நிலையான தொகுதி S ஆகக் கருதுவோம். மற்றும் இயங்கிக்கொண்டிருக்கும் நீரை S′ தொகுதியாகக் கருதுவோம். நீரின் இயங்கு வேகம் $= v$ எனக் கொள்வோம். மற்றும் ஒளியின் திசை வேகம் c ஆனால் $\frac{c}{\mu} = u'$ எனக் கொள்ளலாம். u' என்பது ஒளியின் நீரைச் சார்ந்த திசைவேகம் (அதாவது ஒளியின் S′ஐச் சார்ந்த திசை வேகம் $= u'$).

ஓர் ஒளித்துகளின் (ஃபோட்டான்) Sஐச் சார்ந்த (*i. e.* பரிசோதனைச்சாலை) திசை வேகம் $= V$ எனக் கொள்வோம். எனவே,

$$V = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} = \frac{\frac{c}{\mu} + v}{1 + \frac{c}{\mu}\frac{v}{c^2}}$$

$$= \frac{\frac{c}{\mu}\left(1 + \frac{\mu v}{c}\right)}{\left(1 + \frac{v}{\mu}\right)}$$

$$V = \frac{c}{\mu}\left(1 + \frac{v\mu}{c}\right)\left(1 + \frac{\mu v}{c}\right)\left(1 + \frac{v}{c\mu}\right)^{-1} \quad \ldots(28)$$

$$= \frac{c}{\mu}\left(1 + \frac{v\mu}{c}\right)\left(1 - \frac{v}{c\mu}\right),$$

(சிறிய பிறவற்றைப் புறக்கணித்தபின்)

$$= \frac{c}{\mu}\left[1 + \frac{v\mu}{c} - \frac{v}{c\mu}\right];$$

($\frac{v}{c}$யின் உயர்மடிமிகச் சிறியது எனப் புறக்கணித்தபின்

இழுவைக் குணகம் மிகச் சிறியது எனப் புறக்கணித்தபின்)

$$= \frac{c}{\mu} + v - \frac{v}{\mu^2} = \frac{c}{\mu} + v\left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right) = v' + v\left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right)$$

$$\text{இழுவைக் குணகம்} = \frac{v\left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right)}{v} = 1 - \frac{1}{\mu^2} \quad \ldots(29)$$

மேற்கூறிய இழுவைக் குணகத்திற்கான கோவை பிரனல்ஸ் (Fresnels) என்பார் கொள்கையளவிலே படைக்கப்பட்டது. எனவே இதனை பிரனலின் (Fresnel's) இழுவைக் குணகம் என்று அழைக்கப்படுகின்றது. இதற்கான பரிசோதனை நிரூபணம் ஃபிஸ்யூ (Fizeau) என்பாரால் செய்து காண்பிக்கப் பெற்றது.

(b) $x^2+y^2+z^2-c^2t^2$ என்ற இக்கணியத்திற்கு நேரடியாக லோரண்ட்ஸ் மாற்றச் சமன்பாடுகளை பயன்படுத்தி இது மாற்றமிலி (invariant) என்பதனைக் காட்டுதல் :

நாம் லோரண்ட்ஸ் சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி கீழ்க் கண்டுள்ளதை உண்மையென நிரூபிக்க வேண்டும்.

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2$$

இங்கு S மற்றும் S′ என்ற இரண்டு மேற்கோள் சட்டத் தொகுதிகள் உள்ளன. S என்பது நிலையானது. S′ என்பது v என்ற Sஐச் சார்ந்த திசை வேகத்தோடு இயங்குகின்ற மேற்கோள் சட்டத் தொகுதியாகும். மேலும் (x, y, z, t) என்பது S என்ற நிலைத் தொகுதியில் உள்ள ஆயக் கூறுகள் (x', y', z', t') என்பது S, என்ற இயங்கு தொகுதியில் உள்ள ஆயக் கூறுகளாகும்.

நாம் கீழ்க்கண்ட கோவையை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2$$

$$= \frac{(x - vt)^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} + y^2 + z^2 - c^2 \frac{\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

இங்கு நாம் x', y', z' மற்றும் t' ஆகியவற்றிற்கான மதிப்புகளை லோரண்ட்ஸ் சமன்பாட்டிலிருந்து கண்டு அவற்றைப் பயன்படுத்தியுள்ளோம்.

$$\therefore \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = \frac{c^2}{(c^2 - v^2)} (x - vt^2 + y^2 + z^2$$

$$- \frac{c^2}{c^2 - v^2} c^2 \left(t - \frac{vx}{c^2}\right)^2$$

$$= \frac{c^2}{c^2 - v^2}\left[(x - vt)^2 - c^2 \left(t - \frac{vx}{c^2} \right)^2 \right] + y^2 + z^2$$

$$= \frac{c^2}{c^2 - v^2}\left[x^2 - 2vxt + v^2t^2 - c^2 \left(t^2 - \frac{2vxt}{c^2} \quad \frac{v^2x^2}{c^4} \right)\right] + y^2 + z^2$$

$$= \frac{c^2}{c^2 - v^2}\left[x^2 - 2vxt + v^2 t^2 - c^2t^2 + 2 vxt - \frac{v^2x^2}{c^2} \right] + y^2 + z^2$$

$$= \frac{c^2}{c^2 - v^2}\left[\frac{c^2x^2 + c^2v^2t^2 - c^4t^2 - v^2x^2}{c^2} \right] + y^2 + z^2$$

$$= \frac{c^1}{c^2 - v^2}\left[c^2 (x^2 - c^2t^2) - v^2 (x^2 - c^2t^2 \right] + y^2 + z^2$$

$$= \frac{1}{c^2 - v^2}\left[(c^2 - v^2) \quad (x^2 - c^2 t^2 \right] + y^2 + z^2$$

$$= x^2 - c^2t^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$$

ஆதலின் நாம் இங்குக் கீழேயுள்ளவாறு நிரூபணம் செய்துள்ளோம் என்று சொல்லலாம்.

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$$

எனவே, $x^2+y^2+z^2-c^2 t^2$ என்ற இக் கோவை லோரண்ட்ஸ், நிலைமாற்றச் சமன்பாட்டிற்கு மாற்றமிலி (invariant) என்பது தெளிவாகிறது.

(c) பரும எளிய பகுதி (volume element) $dx\ dy\ dz\ dt$ என்பது லோரண்ட்ஸ் நிலைமாற்றத்தால் மாற்றம் ஏற்படாது என்பதை நிரூபித்தல்.

dx, dy, dz நீளத்தின் எளிய பகுதிகளாக x, y மற்றும் z அச்சுகளில் முறையே கொள்வோம். இக்கால இடைவெளியை S என்ற நிலைச்சட்டத்தில் உள்ள கடிகாரம் அளப்பதாகக் கொள்வோம். லோரண்ட்ஸ் மாற்றத்தினுலும், நீளச் சுருக்கம் மற்றும் கால நீட்சியாலும் Sல் உள்ளவற்றிற்கு S′ என்ற

இயங்கும் சட்டத்தில் கீழ்க்கண்டவற்றை ஒப்பானதாகக் கொள்ளலாம். அவை முறையே

$$\left.\begin{aligned} dx' &= dx\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \\ dy' &= dy \\ dz' &= dz \\ dt' &= \frac{dt}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots(31)$$

இங்கு v என்பது S'ன் திசை வேகமாகும். அதாவது X அச்சில் இயங்கும் S'ன் Sஐச் சார்ந்த திசை வேகமாகும். S'ல் நான்கு பரிமாணப் பரும எளிய பகுதியைக் (four dimensional volume element) கீழ்க்கண்டவாறு கொள்ளலாம்.

$$= dx'\, dy'\, dz'\, dt'$$

$$= dx\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\; dy\, dz\; \frac{dt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$dx'\, dy'\, dz'\, dt = dx\, dy\, dz\, dt \quad \ldots(32)$$

எனவே S' என்ற இயங்குத் தொகுதியில் நான்கு பரிமாணப் பரும எளிய பகுதி ($dx'\, dv'\, dz'\, dt'$) =S என்ற நிலைத்தொகுதியில் நான்கு பரிமாணப் பரும எளிய பகுதி ($dx\, dy\, dz\, dt$).

நான்கு பரிமாணப் பரும எளிய பகுதி ஒரே பருமனை எல்லா நிலைமத் தொகுதியிலும் (inertial system) கொண்டுள்ளது. ஆதலால், $dx\, dy\, dz\, dt$ என்ற நான்கு பரிமாணப் பரும எளிய பகுதி லோரண்ட்ஸ் மாற்றங்களால் மாறாதது அல்லது மாறுபாடு அடையாது என்ற உண்மை தெளிவாக்கப்பட்டு நிரூபிக்கப் பெறுகிறது.

2-4. கால நீட்சி (Time Dilation)

கால நீட்சிக்கான நேரடியான சோதனைச் சான்று ஒன்று காஸ்மிக் கதிர் இயல்பியல் துறையில் கண்டுபிடிக்கப் பெற்றது.

வெளியிலிருந்து காஸ்மிக் கதிர்கள் புவியின் மீது பொழிந்த வண்ணமுள்ளன. இக் கதிர்கள் மிகு ஆற்றல் படைத்த புரோட்டான்களைக் கொண்டவை. இன்னும் பல துகள்களும் இக் கதிர்களில் உள்ளன. புவியின்மேல் பலவகை வாயுக்கள் உள்ளன. இவற்றின் அணுக்களோடு மேற்கூறிய துகள்கள் இடையீடு (interact) செய்கின்றன. எனவே முவான் (Muons) அல்லது மியூ-மெசான்கள் (μ-Mesons) தொடர்ந்து ஆக்கப் பெருகின்றன. இவை மேல் வாயு மண்டலத்திலிருந்து (atmosphere) வாயு மண்டலத்தில் இறங்கி வருகின்றன. அவை புவியை மிகுந்த அளவிலேயும் 2.994×10^8 மீட்டர்கள் / விநாடி என்ற வேகத்திலேயும் வந்தடைகின்றன. இதன் வேகம் ஒளியின் வேகத்தில் 0.988 என்ற அளவு உள்ளது ($0.988c$). இத்துகள்கள் கீழிறங்கும்போது பிற துகள்களாக மாறுதல் அடைகின்றன. மேற்கூறிய துகள்களுக்குச் சராசரி ஆயுள் (mean life) காலம் 2×10^{-6} விநாடி. இந்த ஆயுட்காலத்தில் மெசான் அல்லது முவான் போன்ற துகள்கள் பயணம் செய்யும் தூரம் =

$$d = vt = 2.994 \times 10^8 \times 2 \times 10^{-6}$$

$$= 600 \text{ மீட்டர்கள்}$$

மெசான் பற்றிய முரண்பாடு மெய்ம்மை (μ—Meson Paradox)

மெசான், வாயு மண்டலத்திற்கு மேலே தோன்றி, வாயு மண்டலத்தின் வழியே 600 மீட்டர்கள் மட்டும் கடந்தபின் அவை சிதைவுற்று (decay) பிற துகள்களாக மாறுகின்றன. உண்மை இவ்வாறு இருக்க, புவியின் மீது நிறைய மெசான்கள் (70 விழுக்காடு) வந்தடைவதாகக் கண்டுள்ளனர். இவை 600 மீட்டரிலேயே சிதைவுறுது எங்ஙனம் புவியை வந்தடைகின்றன. என்பது ஒரு சிக்கலான புதிராக இருந்தது. எனவே, இதனை மெசான் பற்றிய முரண்பாடு மெய்ம்மை (Meson Paradox) என்றழைத்தனர்.

சிறப்புச் சார்பியல் சொள்கையின் துணைகொண்டு மேற்கூறிய பிரச்சனைக்கு எளிதாகத் தீர்வு காணலாம். ஒரு நோக்குநர் புவியின் மீது இருப்பதாகக் கொள்வோம். புவியிலிருந்து d_0 என்ற தூரத்திலே மெசான் பிறப்பதாகக் கொள்ளலாம். மெசான் தோன்றுமிடத்திலேயுள்ள ஒரு நோக்குநருக்கு (இந் நோக்குநர் மெசான் உள்ள மேற்கோள் சட்டத்தில் இருப்பதாகக் கொள்ளவேண்டும்). இத் தூரமானது சுருங்கி

d எனத் தோன்றும். இவற்றைக் கீழ்க்கண்டவாறு தொடர்பு படுத்தியுள்ளோம்.

$$\frac{d}{do} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad ...(1)$$

ஒரு மெசான் தான் சிதைவுறுவதற்கு முன் செல்லக்கூடிய பெரும் தூரத்தை (maximum) d = 600 மீட்டர்கள் எனக் கொள்வோம். அதற்கேற்ப *do*யின் மதிப்பினை

$$do = \frac{d}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{600}{\sqrt{1-\frac{(0.998)^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{600}{\sqrt{1-0.996}} = \frac{600}{\sqrt{0.004}} = \frac{600}{0.063}$$

$$= 9524 \text{ மீட்டர்கள்}$$

எனவே ஒரு மெசான் அல்லது முவான் புவியின் மீதுள்ள நோக்குநரைச் சார்ந்து 9524 மீட்டர்கள் உயரத்திலே பிறப்பிக்கப் படுகின்றது. இத் தூரமானது அந்நோக்குநருக்கு 600 மீட்டர் களாகத் தோற்றமளிக்கிறது. எனவே, மெசான்கள் குறைந்த ஆயுட்காலத்தைக் கொண்டிருந்த போதிலும்கூட அவை புவியை வந்தடைகின்றன என்ற உண்மை தெளிவாகிறது.

மேற்கூறிய மெசான் முரண்பாடு மெய்ம்மையை ஐன்ஸ்ட்டைனின் சார்பியல் கால நீட்சிச் சூத்திரத்தைப் பயன் படுத்தியும் விடுவிக்கலாம் அல்லது விளக்கம் காணலாம்.

புவிமீதுள்ள நோக்குநர்க்கு மெசான் அல்லது முவான் பிறக்கும் உயரம் *do* எனக் கொள்வோம். ஆனால் அத்துகளின் ஆயுட்காலம் அவருக்கு நீட்சியுற்று கீழ்க்கண்டவாறு தோன்று கிறது.

$$\bar{t} = \frac{to}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad ...(2)$$

$$= \frac{2 \times 10^{-6}}{\sqrt{1 - \frac{(0.998c)^2}{c^2}}} = \frac{2 \times 10^{-6}}{0.0693}$$

$$= 31.75 \times 10^{-6} \text{ விநாடி}$$

இப்புதிய ஆயுட்காலம், மெசான் பிறக்கும் மேற்கோள் சட்டத்தைச் சார்ந்த நோக்குநருக்கு மெசானின் ஆயுட்காலம் 16 மடங்கிற்குச் சமமாக இருக்கும். எனவே, இப்புதிய ஆயுட்காலத்தைக் கொண்டு, $2{\cdot}994 \times 10^8$ மீட்டர்கள்/விநாடி என்ற வேகத்திலே இயங்கும் மெசான் கடக்கக்கூடிய தூரம்

$$do = (2{\cdot}994 \times 10^8) \times 31{\cdot}75 \times 10^{-6}$$

$$= 9506 \text{ மீட்டர்கள்}$$

இத்தூரம் நீளச் சுருக்கச் சூத்திரத்தின் மூலம் கிடைத்த தூரத்திற்குக் சற்றேறக்குறைய ஒப்பானதாகும். எனவே நீளச் சுருக்கம் மற்றும் கால நீட்சிச் சமன்பாடுகள் மேற்கூறிய மெசான் முரண்பாடு மெயம்மையை விடுவித்து ஒரே மாதிரியான முடிவுகளைத் தந்துள்ளன எனலாம். இம் முரண்பாடு மெய்ம்மையில் கண்ட தீர்வு ஒரு வெற்றியாகும் ஐன்ஸ்டைனின் எடுகோள்களை உண்மையென்று பறைசாற்றுவதாக அமைகிறது. இதன் பயனைக எடுத்துரைத்த தோற்றப்பாடுகளும் சரியானதென்று நிரூபணமாகவும் மேற்கொண்டவற்றைக் கொள்ளலாம். எனவே சார்பியல் கொள்கையின் முடிவுகளில் சிலவற்றிற்குத் தக்க பரிசோதனைச் சான்றுகளாக மெசான் முரண்பாடு மெய்மையைக் கூறலாம்

Lorentz-Fitzgerald Contraction:-

2-5. நீளத்தின் குறுக்கம்

Nb சார்பியல் கொள்கையின் சமன்பாடுகளிலிருந்து காலத்தைப் போன்று, நீளமும் சார்புடையது என்பதை நன்கு அறியலாம். நீளமும் சார்பில்லாதது அல்ல. லோரண்ட்ஸின் நிலை மாற்றச் சமன்பாடுகளின்படி

$$\left.\begin{aligned} y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}\right\} \quad \ldots(1)$$

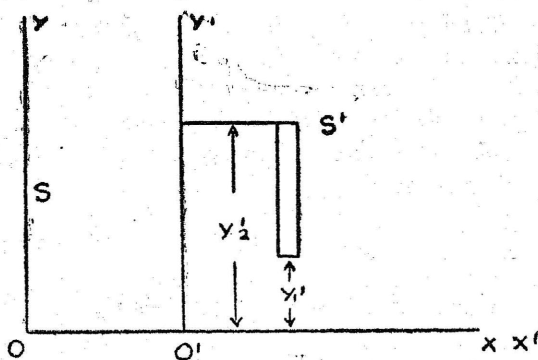
இவ்விரு தொடர்புகளின் பொருள் என்ன என்று பார்ப்போம். ஒரு தண்டு அதன் நீளத்திற்கு குத்தெதிர் திசையிலே

இயங்குவதாகக் கொள்வோம். y அல்லது z அச்சிற்கு இணையாக இயங்குவதாகக் கொள்வோம். இங்நிலையில் இயங்கும்போது அத்தண்டின் நீளமானது அதன் திசை வேகத்தைப் பொருத்தது அல்ல. இதுதான் மேற்கூறிய தொடர்பின் பொருள்.

தண்டின் நீளம் L_0 எனக் கொள்வோம். இதனை S' என்ற இயங்கு சட்டத்தில் இருப்பதாகவும் கொள்வோம். S என்ற தொகுதியில் O என்ற புள்ளியில் உள்ள நோக்குநர் இதன் நீளத்தை அளப்பதாகக் கொள்வோம். y_1' மற்றும் y_2' என்பன தண்டின் இரு முனைகளின் ஆயத் தொலைவுகளாக இருப்பின்

$$y_2' = y_1' = L_0 \qquad \ldots 2)$$

எனவே சமன்பாடு 1ல் இருந்து $y_2 - y_1 = L_0$ எனக் கொள்ளலாம்.

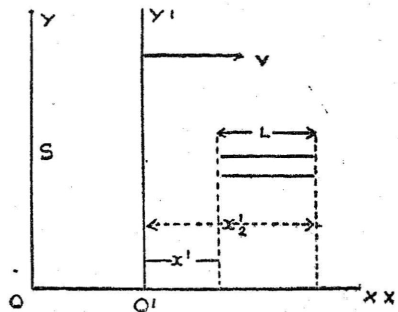


படம் 7. நிலைமத் தொகுதி

எனவே S என்ற தொகுதியில் அளக்கப்பட்ட தண்டின் நீளமும் L_0 ஆகவுள்ளது. ஆதலின், ஒரு திண்பொருள் ஒரு நோக்குநரைச் சார்ந்து சீரான இயக்கத்திலிருந்தால், அதன் இயக்கத்தின் குத்தெதிர்த் திசைகளிலே பொருளின் பரிமாணங்கள் மாற்றமடைவதில்லை என்பது தெளிவாகிறது.

இப்போது S' தொகுதியில் ஒரு நீளமான தண்டானது X அச்சிற்கு இணையாக இருப்பதாகக் கொள்வோம். தண்டானது நிலையாக இருப்பதால் தண்டின் இரு முனைகளுக்கான ஆயங்கள் x_1' மற்றும் x_2' ஆகும். இவை S' தொகுதியில் t' ஐப்

பொருத்தது அன்று. ஏனெனில் தண்டு இப்போது இயங்க வில்லை. ஆகவே தண்டின் நீளம் $L_0 = x_2' - x_1'$ ஆகும்.



படம் 8. நிலைமத் தொகுதி

இதனைத் தண்டின் அசையா நிலை நீளம் எனலாம். S தொகுதியில் உள்ள ஒரு நோக்குநர் இத்தண்டின் நீளத்தை, S' தொகுதி v என்ற திசை வேகத்திலே Sஐச் சார்ந்து இயங்கும் போது அளப்பதாகக் கொள்வோம். S தொகுதியிலே t என்ற காலத்திலே நோக்குநர் தண்டின் முனை ஆயத் தொலைவுகளை x_1 மற்றும் x_2 எனக் காட்சிப் பதிவு செய்கிறார். எனவே இந்நோக்குநருக்குத் தோன்றும் தண்டின் நீளம்

$$L = x_2 - x_1 \qquad \ldots(3)$$

லோரண்ட்ஸ் நிலை மாற்றச் சமன்பாடுகளின்படி

$$x_2' = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} \qquad \ldots(4)$$

$$x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} \qquad \ldots(5)$$

$$L_0 = x_2' - x_1' = \frac{x^2 - x_1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

$$= \frac{L}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}} \quad \ldots(6)$$

$$L < L_o \quad \because \sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} = + \text{ ஆகவுள்ளது}$$

எனவே S′ என்னும் இயங்கு தொகுதியில் உள்ளவருக்குத் தோன்றுவதைவிட S என்னும் (அசையா) தொகுதியில் உள்ள வருக்கு அத்தண்டின் நீளம் குறைந்து காணப்படும். அல்லது ஒரு தண்டு அசையாது இருக்கும் நிலையில் அதை அளப்பவருக்குத் தெரியும் அதன் நீளத்தைவிட அது இயக்கத்தில் இருக்கும் போது அதை அளப்பவருக்கு அதன் நீளம் சுருங்கித் தெரியும் என்று சொல்லலாம். இச்சுருக்கத்தின் அளவு

$$\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}$$

என்ற விகித அளவிலே அமையும். இதனை லோரண்ட்ஸ்-ஃபிட்ஸ் ஜெரால்டு (Lorentz-Fitzgerald) சுருக்கம் என்பர். எடுத்துக்காட்டாக ஒரு நோக்குநர் தன்னுடைய கையிலே ஒரு கோளத்தை எடுத்துக் கொண்டு இயங்கிக் கொண்டிருப்பதாகக் கொள்வோம். அது நிலையாக நின்று நோக்கும் மற்றொரு நோக்குநருக்கு நீள் வளையக் கோளமாகத் (ellipsoid) தோன்றும். சுருக்கத்திற்குரிய சூத்திரத்தில் v^2 என்பது இருப்பதால் சுருக்கம் என்பது செயல மற்றும் எதிர்ச் செயல் (reciprocal) தன்மை உடையதாகும். S மற்றும் S′ என்ற தொகுதிகளில் ஒரே நீளமும் வடிவமும் கொண்ட இரு தண்டுகள் அசையா நிலையில் இயக்கமின்றி இருந்தால் ஒவ்வொரு நோக்குநரும் மற்ற தொகுதியில் உள்ள தண்டு தன்னிடத்தே உள்ள தண்டின் நீளத்தை விடக் குறைந்து இருப்பதாகக் காண்கிறார். பொருள்களின் நீளச் சுருக்கம் இயக்கவியல் அடிப்படையில் எல்லாப் பொருள்களுக்கும் ஏற்ப கண்டுபிடிக்கப்பட்டதாகும். இந்நீளச் சுருக்கம் காட்சிப் பதிவு செய்பவர் -உடன் நிகழ்வினை எந்த விதத்தில் வரையறை செய்கிறாரோ அதையும் பொருத்து அமைவதாக வுள்ளது. $v=c$ என்ற நிலையில் இயங்கிக் கொண்டிருக்கும் தண்டின் நீளம் ஒரு புள்ளி அளவுக்குச் சுருங்கித் தோன்றும். $(l=0) \therefore c=\infty$ (சறிலி) என்ற நிலையில் $\beta=0$ ஆகும். மேலும் லோரண்ட்ஸ நிலைமாற்றச் சமன்பாடு கேலிலியன் சமன்பாடாக மாறுதல் அடையும். இத்தகைய் எல்லையுடைய ஒளியின்

திசை வேகத்திஞலேதான் மேற்கூறிய விளைவுகள் ஏற்படு கின்றன.

2-6. ஏக காலம் பற்றிய சார்பியல் (Relativity of Simultancity)

இரு நிகழ்ச்சிகள் (events) ஒரு காலத்தில் நடைபெறு கின்றன எனக் கொள்வோம். ஒரே சமயத்தில் அவை இரண்டும் நிகழ்கின்றன.

S மற்றும் S′ என்று இரு மேற்கோள் சட்டங்கள் இருப்ப தாகக் கொள்வோம். S′ என்ற இயங்கு சட்டம் v என்ற அளவில் Sஐச் சார்ந்த திசை வேகத்தில் X அச்சின் திசையில் செல்வ தாகக் கொள்வோம்.

S என்ற நிலைச்சட்டத்தில் P_1 மற்றும் P_2 என்ற இரு புள்ளி களில் இரு நிகழ்ச்சிகள் ஒரே காலத்தில் நிகழ்வதாகக் கொள் வோம். ஒரு நோக்குநர் S என்ற சட்டத்தின் O என்ற தோற்றுவாயில் (origin) இருந்து கொண்டு P_1 மற்றும் P_2 என்ற புள்ளிகளில் நிகழ்கின்ற நிகழ்ச்சியைக் காட்சிப்பதிவு (observation) செய்வதாகக் கொள்வோம். இரு புள்ளிகளின் ஆயங்கள் முறையே

$$P_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1)$$

$$P_2 = (x_2, y_2, z^2\ t_2)$$ என்று கொள்வோம்.

இரு நிகழ்ச்சிகளும் ஒரே காலத்தில் S என்ற சட்டத்தில் நிகழ்வதால் $t_1 = t_2$ ஆகும். t_1' மற்றும் t_2' ஆகியவைகளை S′ என்ற இயங்கு சட்டத்தில் இருந்து காணப்படும் நிகழ்ச்சி களுக்கான காலமாகக் கொள்வோம். லோரண்ட்ஸ் நிலை மாற்றச் சமன்பாடுகளிஞல்

$$t_1' = \frac{t_1' - \frac{v\,x_1}{c_2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} \quad ...(1)$$

மற்றும் $$t_2' = \frac{t_2 - \frac{vx_2}{c^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} \quad ...(2)$$

$$\therefore\ t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}} - \frac{\frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

$$= \frac{v(x_1 - x_2)}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \left[\because t_1 = t_2\right] \quad ...(3)$$

S'யில் இரு நிகழ்ச்சிகளும் ஒரே காலத்தில் நிகழ்வதாகக் கொண்டால் $t_1' = t_2'$ எனக் கொள்ளலாம். எனவே $t_1' - t_2' = 0$ ஆனால், மேற்கூறிய சமன்பாட்டில் (3) x_1ன் மதிப்பும் x_2ன் மதிப்பும் சமமாக இல்லை. அதாவது, $x_1 \neq x_2$ எனவே மேற்கூறிய இரு நிகழ்ச்சிகளும் S'யில் ஒரே காலத்தில் நடைபெறுவதில்லை என்பது தெளிவாகிறது. ஆதலின், S என்ற நிலைச் சட்டத்தில் நிலையாக உள்ள நோக்குநருக்கு இரண்டு வேறுபட்ட புள்ளிகளில் P_1 மற்றும் P_2 ஆகியவற்றில் ஒரே சமயத்தில் நிகழ்வதாகக் காணும் நிகழ்ச்சிகள், பிறிதொரு இயங்கு சட்டத்தில் (S'ல்) ஒரே சமயத்தில் நிகழ்வதாகத் தோன்றாது. இங்கு S' என்ற சட்டம் Sஐச் சார்ந்து இயங்கும் தன்மையுடையதாகவுள்ளது. ஆகவே ஏக காலம் என்னும் கருத்து (concept of simultaneity) காலம், நீளம் ஆகியவற்றைப் போலவே சார்புடையது என்பதைத் தெளிவுபடுத்துகிறது.

2-7. திசை வேகங்களின் கூட்டல் விதி

லோரண்ட்ஸ் நிலை மாற்றுச் சமன்பாடுகளின் பயனாக திசை வேகங்கள் பற்றிய சில சூத்திரங்களைப் பெறலாம். திசை வேகங்களைக் குறிக்க ஒரு நிலைச்சட்டத்தையோ இயங்கு சட்டத்தையோ பயன்படுத்தி வருகிறோம். மேற்சொன்ன சூத்திரத்தின் வாயிலாகத் திசை வேகத்தை ஒரு மேற்கோள் சட்டத்திலிருந்து மற்றொரு சட்டத்திற்கு மாற்றவும் இயலும். இதனைச் சற்று விரிவாகக் காண்போம். ஓர் இயங்கு துகளை எடுத்துக் கொள்வோம். இதன் திசைவேகம் S என்ற சட்டத்தில் u எனக் கொள்வோம். Sல் உள்ள நோக்குநர் இதன் திசை வேகத்தை u என அளப்பதாகக் கொள்வோம். S' என்ற சட்டத்தில் ஒரு நோக்குநர் நிலையாக இருந்து அதே துகளின் திசை வேகத்தை u' என அளப்பதாகவும் வைத்துக் கொள்வோம். அதாவது

ஒரு துகள் S என்ற சட்டத்தில் dx செமீ தூரம் கடக்க dt விநாடிகள் ஆகும் என்று வைத்துக் கொள்வோம். S′ என்ற சட்டத்திலுள்ள நோக்குநருக்கு அத் துகள் dx செமீ தூரம் கடந்ததாகவும், dt விநாடிகள் ஆனதாகவும் கொள்வார்.

$$\text{அதாவது} \quad \left.\begin{aligned} u &= \frac{dx}{dt} \\ u' &= \frac{dx'}{dt'} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(1)$$

லோரண்ட்ஸ் நிலை மாற்றுச் சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$\left.\begin{aligned} x &= K(x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= K\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(2)$$

$$\text{இங்கு} \quad K = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{மற்றும்}$$

v என்பது S′ என்ற சட்டத்தின் Sஐ மேற்கோளாகக் கொண்ட சார்பு திசை வேகமாகும் (relative velocity). இங்கு S′ என்ற இயங்கு சட்டம் x திசையில் இயங்குவதாகக் கொள்ள வேண்டும்.

சமன்பாடு 2 ஐ வகைக்கெழு (differentiating) செய்தால்

$$dx = K\,(dx' + vdt')$$

$$dt = K\left(dt' + \frac{vdx'}{c^2}\right)$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + vdt'}{dt' + \frac{vdx'}{c^2}} \qquad \ldots(3)$$

$$= \frac{dx'/dt' + v}{1 + \frac{v}{c^2} \cdot \frac{dx'}{dt'}}$$

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u' v}{c^2}} \qquad ...(4)$$

சமன்பாடு 4 சார்பியல் திசை வேகங்களின் கூட்டு விதி எனப்படும். மிகத் தொன்மையான விசையியலில் (classical mechanics) $u = u' + v$ எனப்படும்.

மேற்கூறிய சார்பியல் திசை வேகங்களின் கூட்டுவிதி ஒளியின் திசை வேகத்தைப் பற்றிய முக்கியமான முடிவைத் தெளிவுபடுத்துகிறது. சமன்பாடு 4ல் $u' = c$ என வைத்துக் கொண்டால்,

$$u = \frac{v + c}{1 + \frac{vc}{c^2}} = \frac{v + c}{\frac{c + v}{c}} = c \qquad ...(5)$$

மேற்கூறிய சமன்பாடு 5லிருந்து நாம் S′ என்ற சட்டத்தில் அளக்கப்பட்ட துகளின் திசை வேகம் u' ஒளியின் திசை வேகத்தை c அடையும்போது, அதே துகளின் திசைவேகம் S என்ற சட்டத்தில், ஒளியின் திசை வேகத்தைப் பெறுகின்றது என்ற உண்மையைக் காண்கிறோம். அதாவது ஒளியின் திசை வேகம் சார்பற்றது; எந்த ஒரு துகளின் திசை வேகத்தைப் பொருத்தும் இல்லை என்ற உண்மையைத் தெளிவாக்குகிறது.

2-8 பொருண்மையும் திசைவேகமும்

மிகத் தொன்மையான நியூட்டோனியன் இயக்கவியலில் (Classical Newtonian Dynamics) ஒரு நகரும் பொருளின் பொருண்மை மாறுபடுவது இல்லை; திசை வேகத்தைச் சார்ந்ததுமில்லை. ஆனால் சார்பியல் கொள்கையில் பொருளின் பொருண்மை திசை வேகத்தைப் பொருத்து மாறுபடும். ஆகவே பொருளின் பொருண்மைக்கும் திசை வேகத்திற்கும் உள்ள தொடர்பை ஆராய்வோம். உதாரணமாக, S மற்றும் S′ என்ற இரு மேற்கோள் சட்டங்களை எடுத்துக்கொள்வோம். S′ என்ற இயங்கு சட்டம் Sஐ விட்டு v என்ற திசை வேகத்திலே X அச்சின் திசையிலே விலகி இயங்கிக்கொண்டிருப்பதாகக் கொள்வோம்.

S என்ற தொகுதியில் m_1 என்ற பொருண்மை கொண்ட ஒரு துகள் u_1 என்ற திசைவேகத்தோடும் S′ என்ற தொகுதியில் m' என்ற பொருண்மை கொண்ட ஒரு துகள் u_1 என்ற திசை வேகத்தோடும் X அச்சின் திசையிலே இயங்கிக்கொண்டிருப்பதாகக் கொள்வோம்.

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}}; \\ \beta_1 &= \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{u_1^2}{c^2}\right)}}; \\ \beta_1' &= \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{u_1'^2}{c^2}\right)}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots(1)$$

திசை வேகத் தொகுப்பு விதியின்படி

$$u_1 = \frac{u_1' + v}{1 + \frac{v}{c^2} u_1'}$$

இதிலிருந்து $\left(1 + \frac{v}{c^2} u_1'\right) u_1 = u_1' + v$

u_1 க்கான கோவையைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$u_1' = \frac{u_1 - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_1} \quad \ldots(2)$$

$$\therefore \quad \beta_1' u_1' = \frac{u_1 - v}{\left(1 - \frac{u_1'^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{v}{c^2} u_1\right)} \quad \ldots(3)$$

இப்போது $1 - \frac{u_1'^2}{c^2} = 1 - \frac{(u_1 - v)^2}{c^2\left(1 - \frac{v}{c^2} \cdot u_1\right)^2}$

$$= \frac{c^2\left(1 - \frac{v}{c^2} u_1\right)^2 - \left(u_1 - v\right)^2}{c^2\left(1 - \frac{v}{c^2} u_1\right)^2}$$

$$\therefore \; c^2\left(1 - \frac{u_1'^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v}{c^2} u_1\right)^2$$

$$= \left(1 - \frac{v}{c^2} u_1\right)^2 c^2 - (u_1 - v)^2$$

$$= c^2\left(1 + \frac{v^2}{c^4} u_1^2 - \frac{2u_1 v}{c^2}\right) - (u_1^2 + v^2 - 2\,u_1 v)$$

$$= c^2 + \frac{u_1^2 v^2}{c^2} - u_1^2 - v^2$$

$$= c^2\left[1 - \frac{u_1^2 + v^2}{c^2} + \frac{u_1^2 v^2}{c^2}\right]$$

இதனை c^2 ஆல் வகுத்தால்

$$\left(1 - \frac{u_1'^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v}{c^2} u_1\right)^2$$

$$= 1 - \frac{u_1^2 + v^2}{c^2} + \frac{u_1^2 v^2}{c^4}$$

சமன்பாடு 3 ஐப் பயன்படுத்தினால்

$$\beta_1' u_1' = \frac{u_1 - v}{\left(1 - \frac{u_1^2 + v^2}{c^2} + \frac{u_1^2 v^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad ...(4)$$

$$= \frac{u_1 - v}{\left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{u_1^2}{c^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \beta\beta_1 (u_1 - v)$$

(சமன்பாடு 1ல் கண்டவாறு)

ஆதலினால் $\beta_1' u_1' = \beta\beta_1 (u_1 - v)$

அல்லது $\frac{\beta_1' u_1'}{\beta_1} = \beta (u_1 - v)$ ...(5)

இத்தகைய பல துகள்கள் X ஆயத்தினூடே இயங்குவதாகக் கொள்வோம். S என்ற தொகுதியில் இத் துகள்கள் இயங்கும் போது அவற்றின் பொருண்மைகளும் உந்தங்களும் மாற்ற மில்லாது இருக்கின்றன எனக் கொள்வோம்.

எனவே

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\, m_1 = \text{மாறிலி} \\ \text{மற்றும் } \Sigma\, m_1 u_1 = \text{மாறிலி} \end{array}\right\} \quad ...(6)$$

∵ β மற்றும் v இவை ஒவ்வொரு துகளுக்கும் ஒன்றாகத் தான் உள்ளது எனவே

$\Sigma\, m_1 \beta v =$ மாறிலி ; ...(7)

$\Sigma\, m_1 u_1 \beta =$ மாறிலி ...(8)

சமன்பாடு 8 லிருந்து 7 ஐக் கழித்தால்

$\Sigma\, m_1 \beta (u_1 - v) =$ மாறிலி என்பதைப் பெறலாம்.

சமன்பாடு எண் 5 ஐப் பயன்படுத்தினால்

$$\Sigma \left[m_1 \frac{\beta_1' u_1'}{\beta_1} \right] = \text{மாறிலி} \quad ...(9)$$

S′ என்ற தொகுதியில் உந்தத்தின் அழிவின்மை விதியைப் (Law of Conservation of Momentum) பயன்படுத்தினால்,

$\Sigma\, m_1' u_1' =$ மாறிலி ...(10)

என்பதைப் பெறலாம்.

சமன்பாடு எண்கள் 9 மற்றும் 10 ஆகியவற்றை ஒப்பிடுவோ மாயின்

$$\frac{m_1 \beta_1'}{\beta_1} = m_1' \quad ...(11)$$

அல்லது

$$\frac{m_1}{\beta_1} = \frac{m_1'}{\beta_1'}$$ = தனி மாறிலி அல்லது சார்பிலா மாறிலி $= m_o$ (எனக் கொள்க)

பின்னர், $m_1 = \dfrac{m_o}{\sqrt{\left(1-\dfrac{u_1^2}{c^2}\right)}}$; $m_1' = \dfrac{m_o}{\sqrt{\left(1-\dfrac{u_1'^2}{c^2}\right)}}$

இச் சமன்பாடு கீழ்க்கண்ட உண்மையை நிரூபணம் செய்வதாக அமைந்துள்ளது. m என்ற பொருண்மையுடைய ஒரு துகள் u என்ற திசைவேகத்தோடு ஒரு தொகுதியைச் சார்ந்து இயங்கினால், mக்கான கோவையை

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{\left(1-\dfrac{u^2}{c^2}\right)}} \qquad \ldots(12)$$

எனக் கொள்ளலாம்.

$u=0$ எனக் கொண்டால் $m=m_0$ ஆகும். எனவே m_0 என்பது நிலையாக இருக்கும் ஒரு பொருளின் பொருண்மை ஆகும். ஆதலால் இது அசையாநிலைப் பொருண்மை (rest mass) என்று அழைக்கப்பெறுகிறது. $u << c$ எனக் கொண்டால், பின்

$\dfrac{n}{c} << 1$ என ஆகும். ஆகவே $m=m_0$ என்பது தெளிவாகும்.

சார்பியல் பொருண்மைச் சூத்திரத்திற்கான பரிசோதனை நிரூபணம்

1905 ஆம் ஆண்டு முதல் 1909 ஆம் ஆண்டுவரையுள்ள இடைக்காலத்தில் சார்பியல் கொள்கையின் முடிவுகளை நிரூபிக்கத்தக்க பரிசோதனைகள் ஏதும் நிகழவில்லை. ஆனால், 1909 ஆம் ஆண்டில் புச்சிரர் (Bucherer) என்ற அறிவியல் வல்லுநர் ஒரு பரிசோதனையைச் செய்து காட்டினார். கதிரியக்க ரேடியத்திலிருந்து மிதவேக எலெக்ட்ரான்களைப் (பீட்டாத் துகள்கள்) பெற்று அவற்றை மின் மாற்றும் காந்தப் புலனிலே இருக்க வைத்து $\dfrac{e}{m}$ என்ற $\dfrac{\text{மின்னூட்டம்}}{\text{பொருண்மை}}$ என்ற விகிதத்தைக்

கண்டறிந்தார் $\frac{e}{m}$ ஐ எலெக்ட்ரானின் திசைவேகச் சார்பலனுகக் கொள்ளப்பட்டுக் கணக்கிடப்பெற்றது.

ஒரு துகளின் பொருண்மை திசை வேகத்திற் கேற்ப மாறுபடும் என்பதை

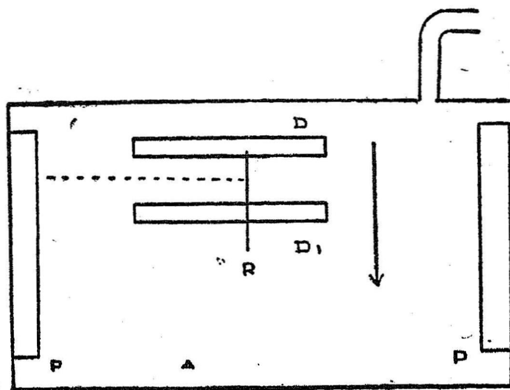
$$m = \frac{m_o}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}$$ என்ற சமன்பாடு விளக்குகிறது. ...(13)

மிகுவேகப் பீட்டாத்துகள்களை ரேடியோ புரோமைடு என்ற கதிரியக்க மூலத்திலிருந்து பெற்று அதன் $\frac{e}{m}$ மதிப்பினைக் கண்டனர். பல்வேறு திசை வேகத்திற்கு $\frac{e}{m}$ மதிப்பினைக் கணக்கிட்டறிந்தனர். மின் இயக்கவியலின் அடிப்படையில் ஒரு துகளின் மொத்த மின்னூட்டம் அழியாதது என்ற உண்மையைப் பயன்படுத்தி $\frac{e}{m}$ இன் மதிப்பைக் கண்டு அதன் மதிப்பில் மாற்ற மேற்பட்டால் அதற்குக் காரணமாக அமைவது அத்துகள் இயங்கும் திசை வேகத்தின் மாறுபாடு தான் என்று முடிவு செய்தனர். இம் மாற்றத்தைக் கீழ்க்கண்ட சமன்பாடு விளக்குவதாக அமைந்துள்ளது.

$$\frac{e}{m} = \frac{e}{m_o}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$ ...(14)

புச்சிரரின் ஆய்கருவியின் அமைப்பினைப் படத்தில் காண்க. இரண்டு உலோக வட்டுக்கள் D,D′ கொண்ட மின்தேக்கி (condenser) ஒன்று உள்ளது. இரண்டு வட்டுக்களுக்கிடையில் அதன் மையத்தில் (O) பீட்டாத் துகள்களின் மூலமாகிய ரேடியம் புரோமைடு (R) வைக்கப்பட்டுள்ளது. இரண்டு வட்டுக் களுக்கும் இடைப்பட்ட தூரம் 0.25 மில்லிமீட்டர் ஆகும். வட்டுக்களின் விட்டம் 8 சென்டிமீட்டர்களாகும். இவை யிரண்டுக்கு மிடையில் ஒரு மின் அழுத்த வேறுபாடு (E) செங்குத்துத் திசையிலே (vertical direction) கொடுக்கப்பட்டது. இம் மின் தேக்கி அமைப்பினை ஓர் உருளை வடிவப் பெட்டி Aயில் வைத்து அதனை வெற்றிடமாக்கி விட்டனர்.

உருளை வடிவப் பெட்டியின் உட்புறம் PP என்ற ஒளிப்படத் தகடுகள் சுற்றி அமைக்கப்பட்டுள்ளது. இப் பெட்டியை ஒரு



படம் 9. புச்சிரரின் ஆய்வுக்கருவியின் அமைப்பு

படித்தான (homogeneous) காந்தப் புலனை (மின்னோட்டம் தாங்கிய இரு ஹெல்ம் ஹோல்ட்ஸ் சுருள்கள்) வட்டுக்களின் பரப்புக்கு இணையாக அமைத்தனர்.

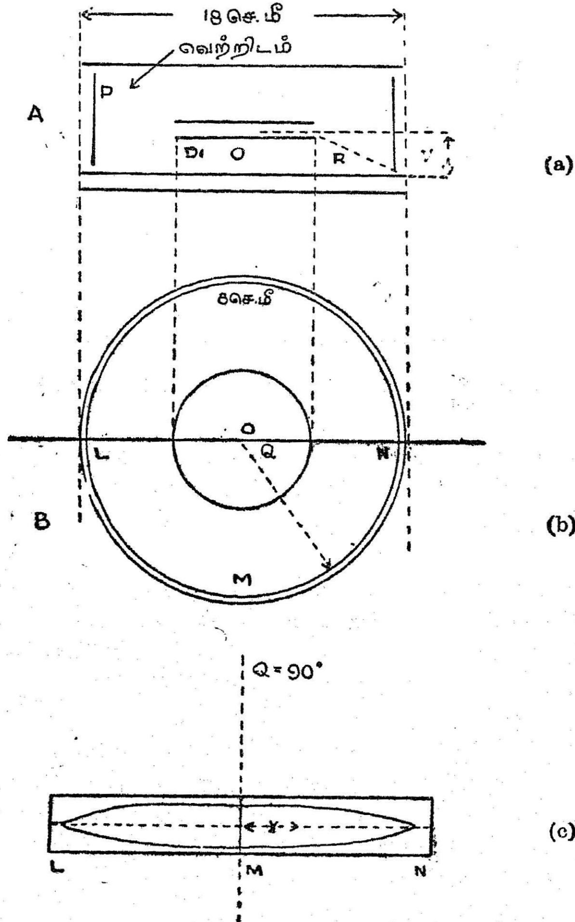
ரேடியத்தால் உமிழப்பட்ட பீட்டாத் துகள்கள் பலவகைப் பட்ட திசைவேகம் உடையன. இத் துகள்கள் DD_1 என்ற பகுதியினை விட்டு விலகிச் செல்ல வேண்டுமாயின் கிடை மட்டத்திலே தட்டுக்களினூடே இயங்கிய பிறகுதான் வெளிச் செல்ல இயலும்.

ஒரு பீட்டாத் துகளின் எலெக்ட்ரான் திசைவேகம் v எனக் கொள்வோம். D என்ற தட்டு நேர்மின்னூட்டமுடையதாக இருக்குமானால், துகளின் மீது வினைபுரியும் விசை $= Ee$ ஆகும். இது மேல் நோக்கி செயல் புரியும்.

துகள் O என்ற புள்ளியிலிருந்து வெளிப்படுகிறது. இத் துகள் வெளிக் கிளம்பும்போது காந்த புலனைச் சார்ந்த திசைக் கோணம் (azimuthal angle) O வாக இருக்கிறது (படம் 10 *b*). இதனால் அத்துகள் மீது வினை புரியும் காந்த விசை $= Hev. \sin \theta$. இத்துகள் வெளியே தப்பிச் செல்ல மேற்கூறிய இருபுலன் களால் துகள் மீது வினை செய்யும் விசைகள் ஒன்றுக்கொன்று சமமாக இருக்க வேண்டும். எனவே,

$$Ee = Hev\ \sin\theta$$

அல்லது $$v = \frac{E}{H\sin\theta} \qquad ...(15)$$



படம் 10. a. மின்தேக்கி அமைப்பினை உருளை வடிவப் பெட்டி A-யில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. b. எலெக்ட்ரான்கள் வெளிக் கிளம்பும்போது காந்தப் புலனைச் சார்ந்த திசைக் கோணத்தைக் குறிப்பது.

மேற்கூறிய சமன்பாட்டிலிருந்து ஒன்று தெளிவாகும். பீட்டாத் துகளின் திசை வேகம் திசைக் கோணத்தின் (θ)

சார்பலஞக அமைந்துள்ளது. மிகுவேகத் துகள்கள் தப்பிச் செல்ல குறைந்த திசைக் கோணமும் குறை வேகத் துகள்கள் தப்பிச் செல்ல அதிக திசைக் கோணமும் தேவைப்படுகிறது. பலவகைப்பட்ட திசை வேகங்கள் கொண்ட துகள்களின் பாதைகளை ஒரு தொடர்ந்த வளை கோடாக (curve) அமையும். இதனை ஒளிப்படத் தகட்டில் காணலாம். LMN என்ற பெட்டியின் பாதிச் சுற்றளவுக்கு ஏற்ற ஒரு வளைகோட்டினைப் படம் 10 cஇல் காணலாம். மறுபாதி வளைகோடு E மற்றும் H ஆகியவற்றை ஒரே காலத்தில் மாற்றியமைத்தபோது கிடைத்தது ஆகும்.

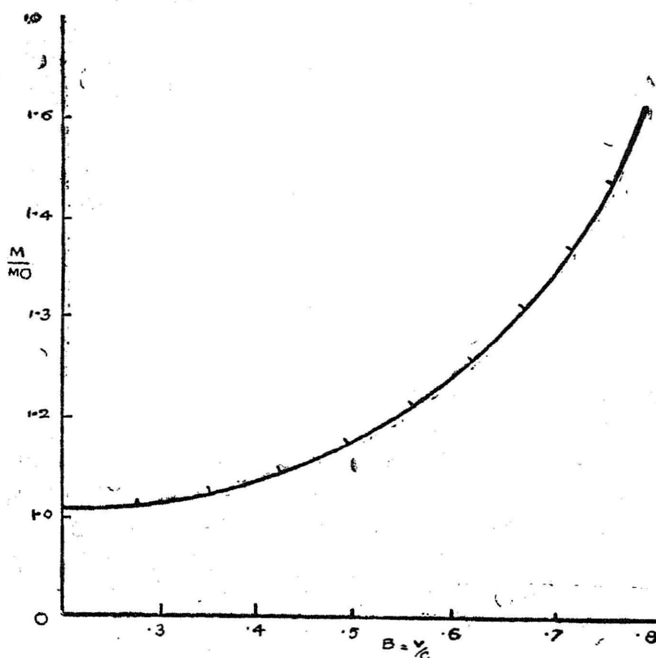
இரு வட்டுக்களுக்கிடைப்பட்ட இடத்திலிருந்து வெளி வந்த துகள் v என்ற திசை வேகத்தில (சமன்பாடு 13) செல்லுகிறது. காந்தப் புலன் மட்டுமே இத்துகளுக்கு ஒரு விளக்கத்தைக் கொடுக்கிறது. இந்த பீட்டாத்துகள்கள் R என்ற ஆரமுடைய வட்டத்தின்வில் (arc) போன்ற பாதையிலே பயணம் செய்யும். Hக்குச் செங்குத்தான vயின் திசைக் கூறு $= v \sin\theta$ ஆகும்.

$$\frac{mv^2}{R} = Hev \sin\theta$$

அல்லது $$\frac{e}{m} = \frac{v}{HR\sin\theta} = \frac{E}{H^2R\sin\theta} \qquad \ldots(16)$$

மின் மற்றும் காந்தப் புலன்களின் வலிமை முறையே E மற்றும் H ஆகியன நமக்குத் தெரிந்தவை ஆகும். துகளின் வட்டப்பாதையின் ஆரத்தை (R) ஒளிப்படத் தகட்டில் உள்ள செங்குத்து விலக்கத்திற்கான (Y) பதிவினை அளந்து கண்டு கொள்ளலாம். எனவே $\frac{e}{m}$ மதிப்பினைச் சமன்பாடு 14ஐக் கொண்டு கணக்கிடலாம். இதே பரிசோதனை மேலும் துல்லியமாக ஸான் (Zahn, 1937) என்பாரால் மீண்டும் செய்யப் பெற்றது. இதன் விளைவினைப் படத்தில் காணலாம் (படம் 11).

பரிசோதனையைச் சீராகப் பன்முறை திரும்பச் செய்தும், திருத்த கூறுகளைப் பயன்படுத்தியும் ஓர் உண்மையினை நிரூபித்தனர். எலெக்ட்ரான்களின் (பீட்டாத்துகள்) பொருண்மையானது அதன் திசை வேகத்திற்கேற்ப சமன்பாடு 13 காட்டிய தொடர்புப்படி மாறுகிறது என்பது தெளிவாக நிரூபிக்கப் பெற்றது.



படம் 11. எலெக்ட்ரானின் திசை வேகத்திற்கேற்ப பொருண்மையின் வேறுபாடு

புச்சிரரின் பரிசோதனையில் கிடைத்த முடிவுகளைக் கீழ்க் கண்ட அட்டவணையில் காணலாம். இதில் $\frac{e}{m}$ என்பது மாறிலியாக இருப்பதைக் காண்க.

அட்டவணை 1

$\frac{v}{c}$	$\frac{e}{m_o}$ e.m.u]gm
0.3173	1.752×10^7
0.3787	1.761
0.4281	1.760
0.5154	1.763
0.6870	1.767

2-9. ஐன்ஸ்டைன் பொருண்மை—ஆற்றல் சமன்பாடு

ஒரு பொருளின் பொருண்மை, அதன் திசை வேகத்திற்கு ஏற்ப மாறுபாடு அடைகிறது என்று கண்டோம். இவ்வுண்மை ஆற்றலைப் பற்றிய நமது கருத்தினைச் சிறிது மாற்றித் தெளிவு படுத்துவதாக உள்ளது.

ஒரு பொருளின் பொருண்மை அசையாத நிலையில் m_0 எனவும், அதன் மீது F என்ற விசை x திசையிலே செலுத்தப் படுவதாகவும் கொள்வோம். மிகத் தொன்மையான இயற்பியலில் (classical physics) விசையை கீழ்க் கண்டவாறு வரையறுக்கப் பெற்றுள்ளது. விசை காலத்திற்கேற்ப மாறுபடும் பொருளின் உந்தம் ஆகும். அதாவது ஒரு பொருளின் மீது விசை தாக்கும் போது இவ்விசைக்கேற்ப பொருளின் உந்தத்தில் (momentum) மாறுபாடு ஏற்படும். இது நியூட்டனின் இரண்டாம் விதியாகும் (Newton's Second Law).

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(mv) = m\frac{dv}{dt} \qquad ...(1)$$

இச் சமன்பாட்டில் பொருளின் பொருண்மை m ஆனது ஒரு மாறிலி (constant) ஆகும். முன்னைய இயற்பியலின்படி பொருளின் பொருண்மை ஒரு மாறிலி ஆகும். ஆனால், சார்பியல் இயந்திரவியலின் (relativistic mechanics) பொருண்மை மாறும் தன்மை கொண்டது ஆகும். எனவே, சமன்பாடு 1ஐ மாற்றி அமைக்கலாம்.

$$F = \frac{d}{dt}(mv) = m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt} \qquad ...(2)$$

ஒரு பொருள் dx என்ற அளவு தூரத்தைக் கடக்க அதன் மீது விசை (F) செலுத்தப்பட வேண்டும். ஆகவே அவ்விசையால் செய்யப்படும் வேலை (dw)

$$dw = F\,dx$$

சமன்பாடு 2ஐப் பயன்படுத்துவோம்.

$$dw = m\frac{dv}{dt}dx + v\frac{dm}{dt}dx \qquad ...(3)$$

ஆனால், பொருளின் திசைவேகம் $v = \frac{dx}{dt}$ ஆகும்

$$\therefore dw = m.v.dv + v^2 dm \qquad ...(4)$$

முன்பு கண்ட mக்கான சமன்பாட்டின்படி

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

அல்லது $$m^2 = \frac{{m_o}^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

அல்லது $m^2c^2 - m^2v^2 = {m_o}^2c^2$

இதற்கு வகைக்கெழு (differentiating) காணலாம்.

$c^2 . 2m . dm - v^2 . 2m . dm - m^2\, 2vdv = 0$ அல்லது $mvdv + v^2dm = c^2 . dm$ ...(5)

மேலும் $dm = \frac{mv\, dv}{c^2 - v^2}$ ...(6)

சமன்பாடுகள் 4 மற்றும் 5 ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க்கண்ட சமபாட்டினைப் பெறலாம்.

$dw = c^2 . dm$ ...(7)

பொருளின் மீது வேலை நிகழும்போது அப் பொருளின் இயங்கு ஆற்றலின் அளவு அதிகரிக்கின்றது. அதனுல் அப்பொருளின் இயக்க ஆற்றலின் அளவு கூடுகின்றது. பொருளின் இயக்க ஆற்றலின் மாற்றத்தை dT எனக் கொள்வோம்.

$dT = c^2\, dm$ ...(8)

இதனுல் பொருளின் இயக்க ஆற்றலில் ஏற்பட்ட மாற்றமான (dT) ஆனது அப்பொருளின் பொருண்மையில் ஏற்பட்ட மாற்றத்திற்கு (dm) நேர்விகிதத்தில் உள்ளது தெளிவாகிறது. சமன்பாடு 8ல் உள்ள c^2 ஒளியின் திசை வேகம் ஆகும். இது ஒரு மாறிலி. dmக்கு சமன்பாடு 6ல் உள்ள மதிப்பை பதிலீடு செய்வோமாயின்

$$dT = \frac{c^2 .\, mvdv}{c^2 - v^2} = \frac{mvdv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

$$= \frac{m_o}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} \cdot \frac{vdv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

$$= \frac{m_o\, vdv}{\left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right]^{\frac{3}{2}}} \qquad \ldots(9)$$

$1 - \frac{v^2}{c^2} = \theta$ எனக் கொள்வோமாக.

$$\therefore \quad vdv = -\frac{c^2 d\theta}{2} \qquad \ldots(10)$$

சமன்பாடு 9ஐ தொகுதி ஆக்கம் (integration) செய்வோமாயின்

$$\therefore \quad T = \int_0^v \frac{m_o . v . dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^v - \frac{m_o c^2\, d\theta}{\left(2(\theta)\right)^{\frac{3}{2}}}$$

அல்லது $T = m_o c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} - 1\right]$

$$= mc^2 - m_o c^2$$

$$T = (m - m_o)\, c^2 \qquad \ldots(11)$$

சமன்பாடு 11லிருந்து, ஒரு பொருளின் இயக்க ஆற்றலை அப்பொருளின் பொருண்மையின் அதிகரிப்பு மூலமாக வெளிப்படுத்தலாம் என்ற உண்மை தெரிகிறது. மேற்கூறிய உண்மையை வேறு விதமாகவும் கூறலாம். ஒரு பொருளின் அசையா நிலைநிறை (rest mass) m_o என்று கூறும்போது அதன் ஆற்றல் $m_o c^2$ ஆகும். பொருள் அசையா நிலையில் இருக்கும்போது அதன் ஆற்றல் $m_o c^2$ ஆகும். ஒரு பொருளின் மொத்த ஆற்றல் அப்பொருளின் இயக்க ஆற்றல் மற்றும் அப்பொருள் அசையா நிலையில் தன்னகத்தே கொண்டுள்ள அசையா ஆற்றல் இவைகளின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமாகும்.

எனவே, பொருளின் மொத்த ஆற்றல்

$$E = T + m_0c^2$$

இயக்க ஆற்றல் $(T) = (m - m_0)c^2$

$$E = (m - m_0)c^2 + m_0c^2$$

$$\therefore \boxed{E = mc^2} \qquad ...(12)$$

இதனால் பொருண்மை mக்குச் சமமான ஆற்றல் mc^2 என்பது பெறப்படுகிறது. அல்லது ஆற்றல் Eக்குச் சமமான பொருண்மை

$$m = \frac{E}{c^2} \qquad ...(13)$$

என்பது பெறப்படுகிறது.

முடிவுகள் : சமன்பாடு 12 ஆனது சிறப்புச் சார்பியல் கொள்கையின் தனிச் சிறப்பு வாய்ந்த முடிவாகும். இச்சமன்பாடு மிகவும் பெருமை மிக்கதும் சிறப்புப் பொருந்தியதும் ஆகும். இச் சமன்பாடு "ஐன்ஸ்டைனின் பொருண்மை ஆற்றல் சமன்பாடு" என்றழைக்கப் பெறுகிறது. இச்சமன்பாடு பொருண்மைக்கும் ஆற்றலுக்கும் உள்ள தொடர்பை எடுத்துக் காட்டுவதாகவும், அவற்றிற்கு இடையேயுள்ள சமத்துவத்தை வெளிப்படுத்துவதாகவும் அமைந்துள்ளது இதன் சிறப்பு ஆகும். இதனால் நாம் ஒரு புதிய ஆற்றலைக் காண்கிறோம்

வெப்ப ஆற்றலையும் பிற ஆற்றலையும் எவ்வாறு வெப்பமாகக் காண்கிறோமோ அதே போன்று பொருண்மை ஆற்றலையும் பிற ஆற்றல்களையும் பொருண்மை வடிவாகக் காணலாம். சார்பியல் கொள்கையின்படி பொருண்மையும் ஆற்றலும் ஒன்றுக்கொன்று சமமானவை. ஒன்றை மற்றொன்றாகவும் சமன்படுத்திக் காணலாம். இவற்றினிடையே ஒரு பொது தொடர்பு உண்டு. பொருண்மை ஆற்றல் என்ற எண்ணம் சார்பியல் கோட்பாட்டால் விளைந்த கடை முறைக்குப் பயன்தரும் முடிவாகும்.

(ii) மற்ற உருமாற்றச் சமன்பாடுகளைப் போன்று இயக்க ஆற்றலுக்கான கோவை (T)யையும் முது பழங் கொள்கையில் கூறப்பட்ட கோவைக்குச் சமமானதாக மாற்றலாம்.

அதாவது $v << c$ ஆக இருந்தால்,

$$T = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_o c^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left[1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \dots\right]$$

$$T = m_o c^2 \left[1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \dots\dots - 1\right]$$

$$= \frac{1}{2} m_o v^2 + \frac{3}{8} m_o \frac{v^4}{c^2} + \dots \qquad \dots(14)$$

எனவே $v << c$ ஆக இருக்கும் பொழுது

$$T = \frac{1}{2} m_o v^2 \qquad \dots(15)$$

இக் கோவை சார்பியல் தழுவல் இல்லாத முன்னைய எந்திர வியலில் உள்ள இயக்க ஆற்றலுக்கானது. மேற்கூறிய சார்பியல் கொள்கை முக்கியத்துவம் பெற வேண்டுமானால் vயின் மதிப்பு அதிக அளவிலே இருத்தல் அவசியம் என்பது தெளிவாகிறது.

(iii) ஒரு பொருள் v என்ற திசைவேகத்தோடு இயங்கு வதாகக் கொள்வோம். இதன் ஆற்றலைக் கண்டறிந்து அதைப் பொருண்மையாக அல்லது உந்தமாக மாற்றலாம்.

இப்பொருள் இயங்கும் போது அதனோடு இணைந்த உந்தம்

$$P = mv = \frac{Ev}{c^2} \qquad \dots(16)$$

$$\left[\because m = \frac{E}{c^2}\right]$$

அதாவது $$P = \frac{m_o v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad ...(17)$$

$$\left[E = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right]$$

$$\therefore \quad E^2 \left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right] = m_o^2 c^4$$

$$E^2 - \frac{E^2 v^2}{c^2} = m_o^2 c^4$$

சமன்பாடு 16ஐப் பயன்படுத்தி

$E^2 - P^2 c^2 = m_o^2 c^4$

எனவே $E^2 = m_o^2 c^4 + P^2 c^2$ ...(18)

மேற்கூறிய தொடர்பினை, ஆற்றல் மற்றும் உந்தத்தைப் பெற்றுள்ள ஒரு ஃபோட்டானுக்கும் பயன்படுத்தலாம்.

ஒரு ஃபோட்டானின் ஆற்றல்

$E = hv$;

மற்றும் $v = c$

$$\therefore P = \frac{E \cdot v}{c^2} = \frac{E \cdot c^2}{c^2} = \frac{E}{c} = \frac{h \cdot v}{c} \quad ...(19)$$

மேலும் சமன்பாடு 18ல் 19ஐப் பயன்படுத்தினால்

$m_o = 0$

அதாவது ஃபோட்டானின் அசையா நிலைப் பொருண்மை பூச்சியமாகும். இஃது இப்படித்தான் இருத்தல் வேண்டும் அவ்வாறு இன்றேல் ஒளியின் திசை வேகத்தோடு இயங்கும் ஒரு ஃபோட்டானின் பொருண்மை சமன்பாடு 11 மற்றறு 12ன்படி ஈறிலியாக இருக்கும் (infinite). ஃபோட்டானின் அசையா நிலைப் பொருண்மை பூச்சியமாக இருந்தபோதிலும், அதன் இயக்க ஆற்றலின் பயனாகப் பொருண்மையைப் பெற்றுள்ளது. (சமன் பாடு 13ல் கூறியபடி). இப் பொருண்மை $= \frac{hv}{c^2}$ ஆகும்.

இதற்கேற்ப அதன் உந்தம் $= \frac{hv}{c}$.

பொருண்மை ஆற்றல் சமன்பாட்டின் சிறப்புகள்

$E = mc^2$ என்ற சமன்பாடு சிறப்புச் சார்பியல் கொள்கையின் பல சமன்பாடுகளையும் விட மிகவும் சிறப்புப் பெற்றது ஆகும். இச் சமன்பாடு பொருண்மையை ஆற்றலாகவும், ஆற்றலைப் பொருண்மையாகவும் மாற்றலாம் என்பதைத் தெளிவாக்குகிறது. இதுவரை நாம் கையாண்டு வந்த ஆற்றல்கள் பலவிதம். எடுத்துக்காட்டாக வெப்ப ஆற்றல், மின் ஆற்றல், இயக்க ஆற்றல், நிலையாற்றல், அக ஆற்றல் (internal energy), காற்றின் ஆற்றல் என்பன போன்றவற்றைக் கூறலாம். தற்போது பொருண்மை ஆற்றல் (mass energy) என்ற இப்புதிய ஆற்றலையும் மேற்கூறிய வரிசையில் சேர்க்கலாம். ஆற்றலைப் பொருண்மை வடிவிலும் பொருண்மையை ஆற்றல் வடிவிலும் காணச் செய்த பெருமை இச் சமன்பாட்டிற்கு உண்டு. பொதுவாக ஆற்றல் அழிவின்மை (conservation of energy) விதியையே இதுவரை பயன்படுத்தி வந்தோம். இவ்விதியானது உண்மையில் பொருண்மை அழிவின்மை விதியையும் (conservation of mass) தன்னகத்தே கொண்டதேயாகும். இந்நிலையில் ஆற்றல் அழிவின்மை விதியும் பொருண்மை அழிவின்மை விதியும் ஒன்றுதான் என்று உறுதியாக எடுத்துக்காட்டி இவற்றிற்குப் பொதுவாகப் பொருண்மை - ஆற்றல் அழிவின்மை விதியாக ஒன்றுபடுத்திக் காணும் வகை ஏற்பட்டுள்ளது.

மேற்கூறிய சமன்பாட்டின் சிறப்பினால் மிகச் சிறிய அளவு பொருண்மை மூலமாக அளப்பரிய ஆற்றலைப் பெறலாம் என்பது தெளிவாகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, 1 கிராம் பொருளைக் கொண்டு, $1 \times (3 \times 10^{10})^2 = 9 \times 10^{20}$ எர்க்ஸ் $= 9 \times 10^8$ ஜோல்ஸ் அளவு அளப்பரிய ஆற்றலைப் பெறலாம். இவ்வாற்றலுக்குச் சமமான மின் ஆற்றலின் அளவு சுமார் 25 மில்லியன் கிலோ-வாட்-மணிகள் ஆகும். மேலும் இச் சமன்பாட்டின் துணை கொண்டு அணுக்கரு இயற்பியலில் பல சிக்கல்களுக்குத் தீர்வு கண்டுள்ளனர். இதுவரை விளக்க முடியாத புதிர்களையும், உண்மைகளையும் இதன் துணைகொண்டு எளிதில் விளக்கியுள்ளனர். பொருண்மை அழிவு (annihilation of matter), அணுக்கரு பிணைப்பாற்றல் (nuclear binding energy), அணுக்கரு ஆற்றலின் பிறப்பு, அணுப்பிளவு, அணுச் சேர்க்கை போன்ற பல நிகழ்ச்சிகளைச் சிறப்பாக விளக்க இயலும்.

பொருண்மை — ஆற்றல் சமன்பாடு — பரிசோதனை நிருபணம்

ஒரு பொருளின் பொருண்மைக்கு அதன் திசைவேகத்திற்கும் மிடையேயுள்ள தொடர்பினைக் காட்டும் சூத்திரத்தைக் காண்போம்.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

இச்சூத்திரத்தில் கண்டுள்ள உண்மையைப் பரிசோதனைகள் மூலம் சரி பார்க்கலாம். மிகுவேக எலெக்ட்ரான்களைக் கொண்டும் பீட்டாக் கதிர்களைக் (β–rays) கொண்டும் காஃப்மேன் (Kaufmann), புச்சிரர் (Bucherer), குயி (Cuye), லவான்சி (Lauanchy) ஆகியோரால் இச்சோதனைகள் நிகழ்த்தப்பெற்றன. எடுத்துக்காட்டாக குயி, லவான்சி ஆகியோர் செய்த பரிசோதனையை மட்டும் கண்டு காணலாம்.

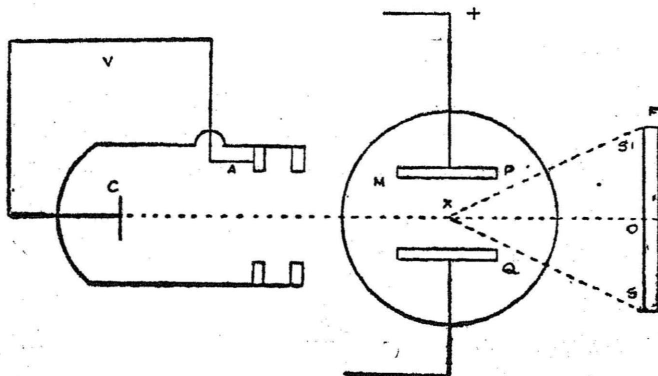
குயி, லாவன்சி ஆகியோரது பரிசோதனை
ஆய் கருவியும் கொள்கையும்

ஆய் கருவியின் அமைப்பைப் படத்தில் காண்க. இக் கருவியில் முக்கியப் பாகமாக ஒரு வெற்றிடக்குழாய் (vacuum tube) உள்ளது. இதில் C என்பது எதிர்மின் வாய் (cathode) மற்றும் A என்பது நேர்மின்வாய் (anode) ஆகும். A என்ற நேர்மின்வாய் பல வட்டுக்களைக் கொண்டதாகும். அவற்றின் மையத்திலே துகள்கள் உள்ளன. எதிர்மின் கதிர்கள் மேற்கூறிய வட்டுக்களால் மென்கதிர் கற்றையாகவும், இணையான கதிர் களாகவும் மாற்றப்படுகின்றன. எதிர்மின்வாய் மற்றும் நேர்மின்வாய் ஆகியவை மிகு மின்னழுத்தம் கொடுக்கும் தூண்டுச் சுருளின் இரு முனைகளோடு சேர்க்கப்பட்டுள்ளன.

P மற்றும் Q என்பன இரு இணையான தட்டுகள் ஆகும். இவைகள் இரண்டும் இரு வேறுபட்ட மின்னூட்டம் கொண்டவை. எனவே, இவற்றிற்கு இடையில் ஒரு மின்புலம் (X) ஏற்பட்டுள்ளது. மின்புலனைக் கொடுக்க ஒரு மின்காந்தம் (M) பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது.

மேற்கூறிய குழாயினை மின்காந்தத்தின் முனைப் பகுதிகளுக்கு (pole-pieces) இடையிலே வைத்து காந்தப் புலனில் அதனை இருக்குமாறு செய்யலாம். இதனைப் படத்தில் M என்ற வட்டப்

பகுதி விளக்கி நிற்கிறது. C என்ற எதிர்மின் வாயினல் வெளியிடப்பட்ட எதிர் மின்கதிர்கள் (எலெக்ட்ரான்கள்) மின் மற்றும் காந்தப் புலன் இல்லாதபோது CO என்ற நேர் கோட்டில் சென்று F என்ற ஒளிப்படத் தட்டில் O என்ற புள்ளியை அடையும். இயங்கும் எலெக்ட்ரான்களை மின்புலத்திற்கும் பின்னர் காந்தப் புலத்திற்கும் அடுத்தடுத்து உட்படுத்தவேண்டும். சோதனைக்குட்பட்ட எலெக்ட்ரான் கதிரின் பாதையும் மேற்



படம் 12. குயி மற்றும் லவான்சி ஆகியோரின் ஆய்கருவியின் அமைப்பு

கோளிற்காக எடுத்துக் கொண்டு குறைவேக எலெக்ட்ரான்களின் பாதையும் ஒன்ருக அமையும்படியாக மின் மற்றும் காந்தப் புலனின் செறிவினை மாற்றியமைக்க வேண்டும். இக்கதிர்கள் மின்புலனுலும் காந்தப் புலனுலும் ஒரே அளவு விலக்கம் (deflection) அடையவேண்டும்.

மின்புலனின் வலிவு (strength) $= X$ என்றும்

காந்தப் புலனின் வலிவு $= H$ என்றும் கொள்வோம்.

குறைவேக எலெக்ட்ரான்களின் திசைவேகம் $= v$

எலெக்ட்ரானின் மின்னூட்டம் $= e$

மின்புலத்தினல் எலெக்ட்ரானின் மீது செயல்படும் விசை $= Xe$

காந்தப் புலத்தினுல் எலெக்ட்ரானின் மீது செயல்படும் விசை $\Big\} = Hev$

இரு புலன்களிலும் எலெக்ட்ரான் கதிர்கள் ஒரே அளவு விலக்கம் அடைகின்றன. எனவே இரு விசைகளும் ஒன்றுக்கொன்று சமமானவை.

$$\because \quad Xe = Hev$$

அதாவது $$v = \frac{X}{H} \qquad \ldots (20)$$

குறைவேக எலெக்ட்ரான்களின் பொருண்மையை m எனக் கொள்வோம். இந்த எலெக்ட்ரான் கதிர்கள் சீரான காந்தப் புலனில் p என்ற ஆரமுடைய வட்டப் பாதையிலே செல்கின்றன.

எனவே $$Hev = \frac{mv^2}{p}$$

அல்லது $$m = \frac{Hep}{v} \qquad \ldots (21)$$

இப்போது X', H', v', மற்றும் m' என்பவற்றை முன் சொன்னவற்றிற்கு ஒப்பான புதிய மதிப்புகளாகக் கொண்டு, எலெக்ட்ரான் கதிர்கள் முன் சொன்ன அளவுள்ள விலக்கத்தைப் பெறுவதாகக் கொள்வோம். எனவே முன்போல்

$$v' = \frac{X'}{H'} \qquad \ldots (22)$$

மற்றும் $$M' = \frac{H'ep}{v'} \qquad \ldots (23)$$

சமன்பாடுகள் 20 மற்றும் 22 ஆகியவற்றிலிருந்து

$$\frac{v'}{v} = \frac{X'H}{H'X} \qquad \ldots (24)$$

சமன்பாடுகள் 21, 23 ஆகியவற்றிலிருந்து

$$\frac{m'}{m} = \frac{H'ep}{v'} \cdot \frac{v}{Hep} = \frac{H'}{H} \cdot \frac{v}{v'}$$

சமன்பாடு 24ல் இருந்து $\frac{v'}{v}$ என்பதின் மதிப்பினைப் பயன்படுத்தினுல்

$$\frac{m'}{m} = \frac{H'}{H} \times \frac{H'X}{X'H} = \frac{H'X}{H^2X'} \qquad ...(25)$$

செய்முறை

முடுக்க மின்னழுத்தம் Vஐ வேறுபடுத்தி எலெக்ட்ரான்களை ஒளிப்படத் தகட்டில் S என்ற புள்ளி வரை மின் புலத்தால் விலக்கலாம். மீண்டும் புலத்தைத் தலைகீழாக மாற்றி S_1 என்ற புள்ளி வரை விலக்கலாம்.

பின்னர் காந்தப் புலனைப் பயன்படுத்தி முன்கூறியது போன்ற எலெக்ட்ரானுக்கு ஒரு விலக்கத்தைக் கொடுக்கலாம். இப்பரிசோதனையை Vயின் மதிப்பினைப் பன்முறை அதிகரித்து செய்யலாம். X என்ற மின்புலத்தின் வலிவு X′ ஆக மாறுகிறது. H என்ற காந்தப் புலத்தின் வலிவு H′ ஆக மாற்றியமையும். இவைகளில் எதைப் பயன்படுத்தினுலும் எலெக்ட்ரான்கள் சமமான ஒரு விலக்கத்தை அடைகின்றன. இதனை ஒளிப்பதிவுப் படத்தில் பதிவு செய்யலாம். மேற்கூறிய காட்சிப் பதிவுகளிலிருந்து எலெக்ட்ரான் கதிர்களில் உள்ள எலெக்ட்ரான்களின் பொருண்மையையும் (m) திசை வேகத்தையும், மேற்கோளாகப் பயன்படுத்திய கதிர்களில் உள்ள எலெக்ட்ரான்களின் பொருண்மை, திசைவேகம் வாயிலாக வெளிப்படுத்தலாம். இதற்காகச் சமன்பாடுகள் 24, 25 ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்தலாம்.

குயி மற்றும் லவான்சி ஆகியோர் சேர்ந்து 2000 காட்சிப் பதிவுகள் செய்து அவற்றின் மூலம் m'/m என்பதற்கான மதிப்பினைக் கண்டறிந்தனர். இச்சோதனைகளில் ஒளியின் திசை வேகத்தில் 26 முதல் 44 விழுக்காடு வரை திசை வேகமுள்ள எலெக்ட்ரான்கள் பயன்படுத்தப் பெற்றுள்ளன. அவர்கள் இறுதிச் சமன்பாட்டின் மூலம் பரிசோதனை நிரூபணத்தைத் தெளிவாக்கியுள்ளனர்.

$$m' = \frac{m}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

அல்லது $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)}}$

இங்கு $m_o = m$ எனவும் மற்றும் $m' = m$ எனவும் கொள்ள வேண்டும்.

இச் சமன்பாட்டின்படி v மற்றும் m ஆகியவற்றினை மதிப்பு மேற்கோள் கதிர்கள் வாயிலாக எடுக்கப்பட்டு பயன்படுத்தப் பட்டன. m_0 என்பது மாறிலி. எனவே

$$m_0 = \frac{m_o}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

என்ற பொருண்மைத் திசை வேகத் தொடர்பினைப் பரிசோதனை மூலம் நிரூபித்துக் காட்டினர். குயி மற்றும் லவான்சி பரிசோதனை மேற்கூறிய சூத்திரத்திற்கு பரிசோதனை நிரூபணமாக அமைந்து விட்ட தனிச் சிறப்பைப் பெற்றுள்ளது. இது ஒரு நேரடி பரிசோதனைச் சான்றாக அமைந்துள்ளது. மேலும் சில சான்று களைக் காணலாம்.

பொருண்மை ஆற்றல் சமன்பாட்டிற்கான கோவையை நிரூபிக்கத்தக்க சான்றுகள் பல நடைமுறை, இயற்பியல் தோற்றப்பாடுகளில் காணக் கிடைக்கின்றன. எடுத்துக் காட்டாக, சிலவற்றை ஆராய்வோம்.

(a) நிறமாலையில் H_a வரியின் நுண்ணமைப்பு வரிகள் பற்றி விளக்கம் தருவதில் பிரச்சனை ஏற்பட்டது. சாமெர்ஃபெல்ட் இதனைச் சிறப்பாக விளக்கியுள்ளார். அதன் பொருட்டு, அணு மாதிரி ஒன்றையும் காட்டினார். அதற்கு 'சாமெர்ஃபெல்ட் சார்புநிலை அணு மாதிரி' (Sommerfield's relativistic atom model) என்று பெயர். இம்மாதிரியின் படி எலெக்ட்ரான்கள் நீள் வட்டப் பாதையிலே சீரற்ற திசை வேகத்திலே அணுக் கருவை வலம் வருவதாகக் கொண்டனர். எலெக்ட்ரான்களின் பொருண்மை அதன் திசை வேகத்திற்கேற்ப மாறுபடுகிறது என்ற கருத்தினை அடிப்படையாகக் கொண்டனர். அணுக் கருவுக்கு அருகில் வரும் போது நீள் வட்டப்பாதையில் செல்லும் எலெக்ட்ரானின் பொருண்மை அதிகரித்தும், தொலைவில்

இருக்கையில் குறைவாகவும் இருக்கும். இத்தகைய சார்பியல் பொருண்மை மாறுபாடு தத்துவத்தினை அடிப்படையாகக் கொண்டு திருத்தக் கூறு ஒன்றினை ஆக்கி நுண்ணமைப்பு வரிகளுக்கான விளக்கத்தைத் தந்தனர்.

(b) பருப்பொருள் அழியும் முறையிலேயும் மேற்கூறிய பொருண்மை ஆற்றல் தொடர்பிற்கான சான்றுகளைக் காணலாம். இரு துகள்கள் கொண்ட ஒரு தொகுதியில் ஒரு எலெக்ட்ரானும் மற்றொரு பாசிட்ரானும் தத்தமது பொருண்மைகளை முழுதும் அழித்து அவை இரு ஃபோட்டான்களாகவோ அல்லது கதிர் வீச்சு ஆற்றலாகவோ உருவெடுக்கின்றன. எனவே, பொருண்மை முற்றிலும் ஆற்றலாக மாற்றப்படுகின்றது. இம் மாற்றமானது மேற்கூறிய பொதுத் தொடர்பினை ஒத்து நிகழ்கிறது.

(c) இரண்டு நியூட்ரான்களும் இரண்டு புரோட்டான்களும் இணையும்போது ஒருஹீலியம் அணுக்கரு ($_2He^4$) தோன்றுகிறது. இந் நிகழ்ச்சியின் போது எல்லையற்ற ஆற்றலும் பெறப்படுகிறது. பொருண்மை அழிவால் ஆற்றல் பெறப்படுகிறது.

இரண்டு புரோட்டான்களின் நிறை

= 2 × ஹைட்ரஜன் அணுக்கருவின் நிறை

$= 2m\,({}_1H^1)$

= 2 × 1.00815 அணு நிறை அலகு.

= 2.01650 அ நி. அ. (*a.m.u.*)

இரண்டு நியூட்ரான்களின் நிறை

= 2 × நியூட்ரான் நிறை

$= 2m\,({}_0n^1)$

= 2 × (1.00898) அ நி. அ.

= 2.01796 அ. நி. அ.

$\therefore\ 2m\,({}_1H^1) + 2m\,({}_0n^1) = (2.01650$

$+ 2.01796)$ அ. நி. அ

= 4.03446 அ. நி அ.

ஹீலியம் அணுக்கருவின் நிறை $= m\ ({}_2He^4)$

$= 4.00387$ அ.நி.அ.

∴ நிறை வேறுபாடு $= 4.03446 - 4.00387$

$= 0.03059$ அ. நி. அ.

$= 0.03059 \times 931.1\ Mev$

$= 28.4\ Mev$

∴ (1 அ.நி.அ. $= 931.1\ Mev$)

இரண்டு நியூட்ரான்களும் இரண்டு புரோட்டான்களும் இணையும் முறை இவ்வாறு விளக்கப் பெறுகிறது. அப்போது 28.4 மில்லியன் எலெக்ட்ரான் வோல்ட் ஆற்றல் வெளிவிடப் பெறுகின்றது.

(d) மற்றொரு எடுத்துக்காட்டினைக் காண்போம்.

ஓர் அணுக்கரு எதிர்வினையை J. D. காக்ராஃபட் மற்றும் G. T. S. வால்டன் என்ற இருவரும் ஆராய்ந்தனர், லித்தியம் அணுக்கருவை 0.5 முதல் 1 *Mev* ஆற்றல் கொண்ட புரோட்டானைக் கொண்டு தாக்கினால் இரண்டு ஆல்பாத் துகள்கள் (α) கிடைக்கின்றன.



$${}_3Li^7 + {}_1H^1 = {}_2He^4 + {}_2He^4$$

(லித்தியம்) (புரோட்டான்) (α- துகள்) (α- துகள்)

எதிர் வினையில் நிறைபற்றிய நிலை பற்றிப் பார்ப்போம்.

$m\ ({}_3Li^7) = 7.01823$ அ.நி.அ. (*a.m u*)

$m\ ({}_1H')\ = 1.00815$ அ.நி.அ.

மற்றும் $m\ ({}_2He^4) = 4.00387$ அ.நி.அ.

∴ $m\ ({}_3Li^7) + 4m\ ({}_1H^1) = 8\ 02638$ அ.நி.அ.

மற்றும் $m\ ({}_2He^4) + m\ ({}_2He^4) = 8.00774$ அ.நி.அ.

∴ நிறையில் குறைவு $= (8.02638 - 8.00774)$ அ.நி.அ.

$= 0.01864$ அ.நி.அ.

இதற்கொப்பான ஆற்றலின் அளவு $= 0.01864 \times 931.1$ *Mev*

$= 17.35$ *Mev*

இம்மதிப்பு பரிசோதனை மூலம் கிடைத்த மதிப்பான 17.28 *M.e.v.*க்கு ஒப்பானதாகும்.

(e) அணுக்கரு பிளவை முறையில் யுரேனியம் போன்ற நிறை மிகு அணுக்கருக்கள் இரு பகுதிகளாகப் பிரிகின்றன. இவைகளை அணுக்கரு பிளவைப் பகுதிகள் என்பர். இப் பகுதிகளின் கூட்டு நிறை, தனித்து முன்பிருந்த அணுக்கருவின் நிறையைவிடக் குறைவாக இருக்கிறது. இப் பொருண்மை குறைவு ஆற்றலாக வடிவெடுத்து வெளி வீசப் பெறுகின்றது. பொருண்மை ஆற்றல் சமன்பாட்டின்படி மேற்கூறிய செயலைச் சரிபார்க்கலாம். அணுகுண்டின் அடிப்படைக் கொள்கையும் இதுதான், அதாவது பொருண்மை குறைவு ஏற்பட்டு, குறைந்த அப்பொருண்மை எல்லையற்ற ஆற்றல் வடிவிலே வெளியிடப் பெறுகிறது.

(f) விண்வெளியில் சுடர் விட்டு பிரகாசிக்கும் விண்மீன்கள் இடைவிடாது ஆற்றலை வெளிவிட்ட வண்ணமுள்ளன. எனவே, இதன் விளைவாக அவைகளின் நிறையில் குறைவு ஏற்படலாம்.

(g) ஆற்றல் மிகு கதிர்கள் பல பருப் பொருள்களால் உட்கவரப் பெறுகின்றன. இதன் விளைவாக சில கட்டுப்பாட்டிற்கு உட்பட்டு பல துகள்கள் பிறக்கின்றன. இரட்டைத் துகளாக்கம் (pair production) நிகழும் போது ஆற்றல் பொருண்மையாக மாற்றமடைகின்றது. எடுத்துக்காட்டாக, காஸ்மிக் கதிர் பொலிவில் எலெக்ட்ரான் பாசிட்ரான் இரட்டைகள் தோன்றுவதைக் கூறலாம். இவையாவும் பொருண்மை ஆற்றல் சமத்துவத்தை நிரூபிக்கக் கூடிய எடுத்துக்காட்டுகளே.

2-10: பொருண்மை, உந்தம் மற்றும் ஆற்றல் பற்றிய மாற்றுச் சமன்பாடுகள் — பொருண்மைக்கான நிலை மாற்றுச் சமன்பாடுகள்.

S மற்றும் S′ என்ற இரண்டு மேற்கோள் சட்டத் தொகுகளை எடுத்துக் கொள்வோம். S′ என்ற இயங்குசட்டம் Sஐ நிலையாகக் கொண்டு v என்ற திசைவேகத்திலே x-அச்சின் திசையிலே விலகி இயங்கிக் கொண்டிருப்பதாகக் கொள்வோம். m என்ற பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருள் u என்ற திசை வேகத்திலே S என்ற சட்டத்திலும்; m' என்ற பொருண்மை யுள்ள ஒரு பொருள் u' என்ற திசைவேகத்திலே S′ என்ற சட்டத்திலும் முறையே இயங்கிக் கொண்டிருப்பதாகக் கொள்வோம்.

எனவே,

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{m_0}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}}; \\ m' &= \frac{m_0}{\sqrt{\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots(1)$$

$$\left.\begin{aligned} u^2 &= ux^2 + uy^2 + uz^2 \\ u'^2 &= u'x^2 + u'y^2 + u'z^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots(2)$$

திசைவேகத் தொகுப்பு விதி (Law of composition velocities)

$$\left.\begin{aligned} u'x &= \frac{ux - v}{\left(1-\frac{v}{c^2}\,ux\right)}; \\ u'y &= \frac{uy\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{1-\frac{v}{c^2}\,ux} \\ u'z &= \frac{uz\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{1-\frac{v}{c^2}\,ux} \end{aligned}\right\} \quad \ldots(3)$$

சமன்பாடு 1ல் இருந்து,

$$\frac{m}{m'} = \left(\frac{1 - \frac{u'^2}{c^2}}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \ldots(4)$$

$$1 - \frac{u'^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{c^2} \left(u'x^2 + u'y^2 + u'z^2 \right)$$

$$= 1 - \left[(ux - v)^2 + uy^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + uz^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \right].$$

$$\times \frac{1}{\left(1 - \frac{v}{c^2} ux\right)^2 c^2}$$

$$= \frac{1}{\left(1 - \frac{v}{c^2} ux\right)^2 c^2} \left[c^2 \left(1 - \frac{v}{c^2} ux\right)^2 - \right.$$

$$\left. \left\{ (ux - v)^2 + uy^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + uz^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \right\} \right]$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{c^2 \left(1 - \frac{v}{c^2} ux\right)^2}$$ எனக் கொள்வோம்.

இதன்படி

$$1 - \frac{u'^2}{c^2} = \alpha^2 \left[c^2 \left(1 + \frac{v^2}{c^4} ux^2 - \frac{2vux}{c^2}\right) \right.$$

$$\left. - \left\{ u^2 - 2vux - \frac{v^2}{c^2} (uy^2 + uz^2) + v^2 \right\} \right]$$

$$= \alpha^2 \left[c^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) + \frac{v^2}{c^2} (u^2 - c^2) \right]$$

$$= \alpha^2 \left[c^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) + v^2 \left(\frac{u^2}{c^2} - 1\right) \right]$$

$$= \alpha^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) (c^2 - v^2)$$

$$1 - \frac{u'^2}{c^2} = \alpha^2 c^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

அல்லது $\left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right) = c^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \Big/ c^2 \left(1 - \frac{v}{c^2} ux\right)^2$

இதன் வர்க்க மூலத்தைக் காணின்

$$\left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 - \frac{v}{c^2} ux\right)}$$

அல்லது

$$\left(\frac{1 - \frac{u'^2}{c^2}}{1 - \frac{u^2}{c^2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{1 - v \frac{ux}{c^2}}$$

இதில் சமன்பாடு 4 ஐப் பயன்படுத்தினல்

$$\frac{m}{m'} = \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{1 - \frac{vux}{c^2}}$$

அல்லது $m' = \dfrac{m\left(1 - \frac{vux}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$

இதுதான் பொருண்மைக்கான உருமாற்றம் அல்லது உருமாற்றச் சமன்பாடு சூத்திரமாகும் $ux = 0$ ஆனல் மேற்கூறிய சூத்திரம் கீழ்க்கண்டவாறு

மாறுதல் பெறும் $m' = \dfrac{m}{\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$ ...(5)

உந்தம் மற்றும் ஆற்றலுக்கான மாற்றுச் சமன்பாடுகள்
(Transformation Equations for Momentum and Energy)

S மற்றும் S′ என்ற இரண்டு மேற்கோள் சட்டத் தொகுதிகளை எடுத்துக்கொள்வோம். இவற்றில் S′ என்ற சட்டத் தொகுதி – x அச்சின் நேர் திசையிலே v என்ற திசை வேகத்தோடு Sஐ விட்டு விலகி இயங்கிச் செல்கிறது. S மற்றும் S′ என்ற இரு தொகுதிகளும் ஒரே புள்ளியை மையமாகக் கொண்டிருக்கும் நிலையிலே ஒரு ஒளிச் சைகை (light signal) O என்ற புள்ளியில் இருந்து புறப்படுவதாகக் கொள்வோம். இவ்வொளிச் சைகையானது இரு தொகுதிகளிலும் ஒரு கோள வடிவிலே பரவுவதாகக் கொள்வோம். இவைகளுக்கான சமன்பாடுகளாவன,

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= c^2 t^2 - S \text{ நிலைச்சட்டத்திற்கு} \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 &= c^2 t^2 - S' \text{ இயங்கு சட்டத்திற்கு} \end{aligned}\right\} \quad ...(6)$$

என்று அமைக்கலாம்.

ஒரு ஃபோட்டான் ஒளிக்கோளத்தின் மீது இருப்பதாகக் கொள்வோம். இந்த ஃபோட்டானுக்கு ஆற்றலும் உந்தமும் உள்ளன. இவையிரண்டிற்குமான தொடர்பினை

$$P^2 = \frac{E^2}{c^2} \quad ...(7)$$

என அமைக்கலாம்.

[∴ ஒரு ஃபோட்டானின் திசை வேகம் ஒளியின் திசை வேகமான c ஆனால் அதன் உந்தம்(momentum) $P = mc$ ஆகும்.

ஆனால் ஆற்றல் $= E = mc^2$ அல்லது

$$E^2 = m^2 c^4 = P^2 c^2$$

$$\therefore P^2 = \frac{E^2}{c^2} \text{ ஆகும்.]}$$

P என்ற உந்தத்தின் மூன்று அச்சுகளுக் கேற்ப முக்கூறுகளை Px , Py மற்றும் Pz எனக் கூறலாம்.

எனவே

$$\left.\begin{array}{l} Px^2 + Py^2 + Pz^2 = \dfrac{E^2}{c^2} - S \text{ என்ற நிலைச்சட்டத்தில்} \\ P'x^2 + P'y^2 + P'z = \dfrac{E'^2}{c^2} - S' \text{ என்ற இயங்கு சட்டத்தில்} \end{array}\right\} \ldots(8)$$

இச்சமன்பாடுகள் சமன்பாடு எண் 6 ஐப் போன்று உள்ளன. ஆகவே, நாம் காலத்தையும் இடத்திற்கான ஆயத்தொலைவுகளை யும் ஒரே தன்மையுடையன எனக் கொண்டால் கீழ்க்கண்டவாறு கூறலாம். லோரன்ட்ஸ் நிலை மாற்றுச் சமன்பாட்டின்படி, சமன்பாடு 8ல் உள்ள $\frac{E^2}{c^2}$ என்ற கூறை உந்த வெக்டரின் (momentum vector) நான்காம் கூருகக் கொள்ளலாம். நாம் சமன்பாடு எண் 6ல் உள்ள நான்காவது கூற்றினை நிலை வெக்டர் (position vector) என்பது போன்று சமன்பாடு 8ல் ஒரு நான்காவது கூற்றினை அமைத்துள்ளோம்.

சமன்பாடு எண் 6 ஐப் போன்றே சமன்பாடு எண் 8ம் எல்லா நிலைம சட்டத்தொகுதிகளுக்கும் உண்மையாகும். ஆதலினால் உந்தம் மற்றும் ஆற்றல் ஆகியனவும் மாற்றச் சமன் பாடுகளைப் பயன்படுத்தி வெளி (space) மற்றும் காலம் (time) ஆகியவற்றை மாற்றுவது போன்று மாற்றவேண்டும்.

வெளி மற்றும் காலம் ஆகியவற்றிற்கான லோரண்ட்ஸ் நிலை மாற்றுச் சமன்பாடுகளில் உள்ள கூறுகளான x, y, z மற்றும் t ஆகியவைகளுக்கு மாற்றாக Px, Py, Pz மற்றும் $\frac{E^2}{c^2}$ ஆகியவற் பயன்படுத்தலாம். இதை நாம் பெறுவதற்குக் காரணமாக இருப்பது இவ்விரு சமன்பாடுகளிடையேயுள்ள சமச்சீர் (symmetry) தன்மையே யாகும்,

$$\therefore\ P'x = \frac{Px - \dfrac{vE}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ என்ற இச்சமன்பாடு}$$

$$x' = \frac{(x - vt)}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$ என்ற சமன்பாட்டைப்

போன்றது. மேலும்

$$E' = \frac{E - vPx}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$ என்ற இச்சமன்பாடு

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$ என்ற சமன்பாட்டைப்

போன்றதாகும்.

ஐன்ஸ்டைனின் சமன்பாடு $E^2 = P^2c^2 + m_o{}^2c^1$ என்ற இத் தொடர்பு லோரண்ட்ஸ் மாற்றத்திற்கு மாற்றமிலி (invariant) ஆகும்.

S மற்றும் S′ என்ற சட்டத்தொகுதிகளின் அடிப்படையில் உந்தம் மற்றும் ஆற்றல் ஆகியவற்றிற்கான மாற்றச் சமன்பாடு களை லோரண்ட்ஸ் நிலை மாற்றச் சமன்பாடுகளைக் கொண்டு கீழ்க்கண்டவாறு அமைக்கலாம்.

$$\left.\begin{aligned} Px' &= \frac{Px - \frac{vE}{c^2}}{\sqrt{(1 - \beta^2)}} \\ Py' &= Py \\ Pz' &= Pz \\ \text{மற்றும் } E' &= \frac{E - vPx}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned}\right\} \quad ...(9)$$

மேற்கூறிய பிரச்சனையில், ஒரு மேற்கோள் தொகுதியி லிருந்து மற்றொரு மேற்கோள் தொகுதிக்கு மாற்றும்போது நாம்.

$E^2 - P^2C^2 = m_0{}^2c^4$ என்பதை மாற்றமில்லாதது என்று நிரூபிக்கவேண்டும். இதன் பொருள்,

$E'^2 - P'^2c^2 = E^2 - P^2c^2 = m_0{}^2c^4$ என்பதை மாற்றமிலி (invariant) என்று விளக்கமாக நிரூபிக்கவேண்டும்.

m_0 என்பது பொருளின் நிலைப் பொருண்மை (rest mass) ஆகும். இது ஒரு மாறிலி (constant) ஆகும். ஆகவே $m_0{}^2c^4$ என்பது லோரண்ட்ஸ் மாற்றமிலி (Lorentz Invariant) எனலாம். எனவே நாம் $(E^2 - P^2c^2)$ என்பதை லோரண்ட்ஸ் மாற்றமிலி என நிரூபணம் செய்தல் போதுமானதாக அமையும்.

மாற்றுச் சமன்பாடுகளின்படி

$$E'^2 - P'^2 c^2 = E'^2 - (Px'^2 + P'y^2 + P'z^2)\, c^2$$

$$= \left\{ \frac{E - vPx}{\sqrt{1-\beta^2}} \right\}^2 - \left\{ \frac{Px - \dfrac{vE}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right\}^2 c^2 - c^2\,(Py^2 + Pz^2)$$

$$= \frac{E^2 + v^2 Px^2 - 2vEPx}{(1-\beta^2)} - \frac{c^2 \left\{ Px^2 + \dfrac{v^2E^2}{c^4} - \dfrac{2vEPx}{c^2} \right\}}{(1-\beta^2)} - c^2\,(P^2y + Pz^2)$$

$$= \frac{E^2 + c^2Px^2 - 2vEPx - c^2Px^2 - \dfrac{v^2E^2}{c^2} + 2vEPx}{(1-\beta^2)} - c^2\,(Py^2 + Pz^2)$$

$$= \frac{E^2\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right) - c^2Px^2\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right) - c^2\,(Py + Pz^2)\,(1-\beta^2)}{(1-\beta^2)}$$

$$= (E^2 - c^2 Px^2) - c^2\,(Py^2 + Pz^2) \qquad \therefore \beta = \frac{v}{c}$$

$$= E^2 - c^2\,(Px^2 + Py^2 + Pz^2)$$

$$= E^2 - c^2 P^2$$

இதிலிருந்து $E^2-c^2P^2$ என்பது லோரண்ட்ஸ் மாற்றமிலி (Lorentz invariant) ஆகும். மேலும் $m_o{}^2C^4$ என்பதும் லோராண்ட்ஸ் மாற்றமிலி ஆகும். எனவே $E^2-P^2c^2 = m_o{}^2C^4$ என்பது லோரண்ட்ஸ் மாற்றமிலி (Lorentz invariant) ஆகும்.

2-11. ஒளியின் எல்லையிலே

மிகப்பழைய இயற்பியல்படி ஒரு துகளின் திசைவேகத்திற்கு எல்லையேயில்லை. ஒரு துகள் சுழியிலிருந்து ஈறிலி (infinity) வரையுள்ள திசை வேகத்தோடு இயங்கலாம் எனவே இக் கூற்றின்படி ஒரு துகளின் திசை வேகத்திற்கு ஒரு முடிவே இல்லை என்பது தெளிவாகும். ஆனால் சார்பியல் கொள்கைப்படி ஒரு பருப்பொருள் துகளின் திசைவேகத்திற்கு ஓர் எல்லையுண்டு. அத்துகள் திசை வேகத்தின் உச்சநிலையாக ஒளியின் திசை வேகத்தைக் கொண்டுள்ளது. ஒளியின் திசை வேகத்தோடு எந்த ஒரு திசை வேகத்தைக் கூட்டினாலும் தொகு பயனாக (resultant) மீண்டும் ஒளியின் திசை வேகத்தையே பெறுவோம் என்பதை நாம் முன்பு கண்டோம். மேலும் l செ.மீ. நீளமுள்ள ஒரு தண்டு v என்ற திசை வேகத்தோடு இயங்கிக் கொண்டிருப்பதாகக் கொள்வோம். இத்தண்டு இயக்கத்தில் இருக்கும்போது இதன் நீளம் அதன் இயக்க திசையிலே சுருங்கிக் காணப்படும். சுருங்கிய பின் அதன் நீளமானது $l' = l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ ஆகக் குறைந்து காணப்படும். இங்கு $v = c$ ஆனால் $l' = 0$ அதாவது தண்டின் நீளம் மிகவும் குறைந்து ஒரு புள்ளியாகக் காட்சி தரும். இதற்கு பதிலாக $v > c$ எனக் கொள்வோம். அப்போது l' என்பது கற்பனையான (imaginary) தொன்றுகிவிடும். இது இயற்கைக்கு ஒவ்வாத (Physically impossible) ஒன்றாகும். எனவே, ஒரு நிலைமத் தொகுதியில் (inertial system) ஒரு துகளை ஒளியின் திசை. வேகத்தைவிட அதிகமான திசை வேகத்தோடு செல்வதாகக் காண இயலாது. மேலும் சார்பியலில் பொருண்மை, உந்தம் மற்றும் ஆற்றல் ஆகியவற்றிற்கான கோவைகளை ஒன்றி நோக்கினால் முறையான சில உண்மைகள் தெளிவாகும். அதாவது துகளின் திசை வேகம் ஒளியின் திசை வேகத்தை நெருங்கிக் கொண்டிருக்கும்போது ($v \to c$) மேற்கூறிய கணியங்கள் (quantities) மிகு வேகத்தில் அதிகரித்து பின்னர் $v = c$ யாகும்போது அவைகளின் மதிப்பு ஈறிலியாகி (infinite) விடும். ஒரு துகள் ஒளியின் திசை வேகத்தோடு இயங்கவேண்டுமானால் அதற்கு முடிவில்லாத உந்தத்தையும் ஆற்றலையும் கொடுக்க வேண்டிய நிலை ஏற்படுகின்றது. மேலும், அவ்வாறு ஒரு துகள் ஒளியின்

திசை வேகத்திற்கொப்பான திசை வேகத்தோடு இயங்கும்போது அதன் பொருண்மை முடிவில்லா நிலையை (ஈறிலி) அடையும். இதுவும் இயற்கைக்குப் புறம்பான தோன்றுகும். எனவே இது வரை கூறியவற்றால் எந்த ஒரு பருப் பொருள் துகளும் ஒளியின் திசை வேகத்திற்கு அதிகமானதொரு திசை வேகத்தோடு இயங்க முடியாது என்பது தெளிவாகும். எனவே ஒரு பருப் பொருள் துகளுக்கான இறுதி திசை வேகமாக ஒளியின் திசை வேகத்தைக் கொள்ளலாம். அசையா நிலையில் சுழிப் பொருண்மையுடைய சில துகள்கள் உள்ளன. ஃபோட்டான், நியூட்ரினோ போன்ற துகள்கள், ஒளியின் திசைவெகத்திலே இயங்கும் இயல்புடையன. இவற்றின் அசையா நிலைப் பொருண்மை சுழியாக இருப்பதால் சார்பியல் பொருண்மை முடிவில்லா நிலையை (ஈறிலி) அடைவதில்லை.

இருந்தபோதிலும் அண்மைக் காலத்தில் சில எடுத்துக் காட்டுக்கள் கண்டுபிடிக்கப் பெற்றுள்ளன. அதன்படி துகளின் இறுதித் திசை வேகமாகிய ஒளியின் வேகத்திற்கு மேலான ஒரு திசை வேகத்தோடு இயங்கும் துகளைக் கண்டுள்ளனர். ஒரு ஃபோட்டான் ஒன்றுக்குக் குறைவான ஒளி விலகலெண் கொண்ட ஊடகத்தில் பாயும் போது அதன் திசை வேகம் ஒளியின் திசை வேகத்தைவிட அதிகமாகும், மேற்கூறிய ஊடகத்தைப் பிளாஸ்மா ஊடகம் எனலாம். இப்பிளாஸ்மா நிலை பொருள்களின் நான்காம் நிலை எனப்படும். இதில் பல இயல்பு எலெக்ட்ரான்கள் (free electrons) உள்ளன.

மின்னூட்டங் கொண்டதும் ஆற்றல் மிகுதியாக உடையது மான சில துகள்கள் மின் மாற்றம் காந்தப்புலனில் இயங்கும் போது அவற்றின் திசைவேகம் ஒளியின் திசைவேகத்திற்கு அதிகமாக உள்ளது. மேலும் அவை சிரன்கோவ் கதிர் வீச்சை வெளிவிடுகின்றன.

பயிற்சி

(1) கேலிலியன் நிலை மாற்றச் சமன்பாடுகளை விளக்கிடுக. அச்சமன்பாட்டில் உள்ள குறைகள் யாவை?

(2) சிறப்புச் சார்பியல் கோட்பாட்டின் அடிப்படை எடு கோள்களை விளக்கவும். இவற்றைப் பயன்படுத்த லோரண்ட்ஸ் நிலைமாற்றச் சமன்பாடுகளை எங்ஙனம் பெறலாம் என்பதனையும் விளக்குக.

(3) திசை வேகங்களின் கூட்டு விதியை விவரித்து அதற்கான வாய்ப்பாட்டினை அமைத்திடுக.

ஒளியின் திசை வேகத்தோடு எந்தவொரு திசை வேகத்தைக் கூட்டினாலும் இருந் திசை வேகம் ஒளியின் திசை வேகமாகவே இருக்கும் என்பதனை நிரூபித்திடுக.

(4) கீழ்க கண்டவைகளில் லோரண்ட்ஸ் நிலை மாற்றச் சமன்பாடுகளின் பயன்களை விளக்கிடுக.

(a) கால நீட்சி

(b) நீளத்தின் குறுக்கம்

(c) ஏககால நிகழ்ச்சிகள்

(5) பொருண்மையானது திசை வேகத்திற் கேற்ப மாறுபாடு அடைகின்றது என்பதை விளக்கும் சூத்திரத்தை அமைத்திடுக.

(6) ஐன்ஸ்ட்டைனின் பொருண்மை-ஆற்றல் சமன்பாட்டினை அமைக்கும் வழிமுறையை கணித அடிப்படையிலே விளக்கிடுக.

(7) லோரண்ட்ஸ் நிலை மாற்றச் சமன்பாட்டினால் மாற்றமேற்படாத தன்மையை எடுத்துக்காட்டுகளுடன் விளக்கிடுக.

(8) தரையின் மீதுள்ள ஒருராக்கெட்டின் நீளம் 100 மீட்டர். ஆனால் அந்த ராக்கெட் விண்ணில் பறக்கும்போது தரைமீது நிலையாக உள்ள நோக்குநருக்கு அதன் நீளம் 99 மீட்டர்களாகத் தோன்றுகிறது. எனவே அதன் வேகம் என்ன? (4.2×10^7 மீ/வினாடி)

(9) ஒரு துகளுக்கு மிகுந்த முடுக்கத்தின் காரணமாக அதன் இயக்கு ஆற்றல் 500 m.e.v. ஆகவுள்ளது. அத்துகளுக்கு ஏற்படும் பொருண்மை அதிகரிப்பு எவ்வளவு? (8.9×10^{-28} கிலோகிராம்)

3. பொதுச் சார்பியல் கோட்பாடு

3.1. சமத்துவ நிலைக் கொள்கை

சீரான நேர்கோட்டியலான (rectilinear) இயக்கம் கொண்ட தொகுதிகளை நிலைமத் தொகுதிகள் (inertial systems) எனலாம். இவை பற்றி சிறப்புச் சார்பியல் கொள்கை விரிவாக விளக்குவதாக அமைகின்றது. இத்தொகுதிகளில் சடத்துவம் பற்றிய விதிகள் பயன்படுகின்றன. அதாவது, ஒரு பொருளானது ஒரு விசையால் தாக்கப்படாதபோது அப்பொருள் நிலையாகவோ அல்லது சீரான இயக்கத்தோடோ இருக்கும். ஐன்ஸ்ட்டைனின் கொள்கைப்படி, இத்தகைய தொகுதிகளில் இயற்பியல் விதிகள் ஒரே வடிவமுடையன என்பதை முன்பே பார்த்தோம். இதே சமத்துவக் கொள்கை அல்லது சமநிலைக் கொள்கை (principle of equivalence) பொதுச் சார்பியலிலும் பயன்படுவதாகவுள்ளது. இங்கு சில தொகுதிகள் எந்த வகையில் வேண்டுமானாலும் இயங்குவதாக உள்ளன; சில தொகுதிகள் முடுக்கம் பெற்று இயங்குவதாக உள்ளன; இன்னும் ஒரு தனிப்பட்ட வகை முடுக்கமுள்ள இயக்கமும் உண்டு; இத்தகைய இயக்கத்தில் எளிதான மிகவும் பொதுவான ஒரு இயல்பியல் தோற்றப்பாடு உண்டு. அதனை 'ஈர்ப்பு' (gravitation) என்பர். ஒரு பொருள் சீரான திசை வேகத்தில் இயங்குவதற்கும் ஒரு பொருள் முடுக்கத்தோடு இயங்குவதற்குமிடையே ஒரு வேறுபாடு உண்டு என்பதை முதுபழம் எந்திரவியல் கூறுகிறது. பின்னால் சொல்லப்பட்ட வகையில் சடத்துவத் தொடர்பான விசைகள் செயல்படுகின்றன. எனவேதான் ஒரு பொருளானது திடீரென அதன் இயக்கத்தைத் தொடங்கும் போதும் நிறுத்தும் போதும் ஒரு உதறல் (jerk) ஏற்படுகின்றது. இது ஏற்படுவதற்கான காரணம் என்ன என்று பார்ப்போம். பொருள்களுக்குச் சமத்துவத் தன்மையுண்டு. இதன் காரணமாக ஒரு பொருள் அசைவில்லா நிலையில் இருக்கும்போது அப்பொருள் அதே நிலையில் இருக்க முயற்சி செய்கிறது. ஒரு பொருள் இயங்கிக் கொண்டிருக்கும்போது அப்பொருள் தொடர்ந்து அதே நிலையில் இயங்கிக் கொண்டிருக்கவே முயற்சி செய்கிறது. எனவே பிற விசைகள் இப்பொருள்கள் மீது செயல்படாதபோது தத்தம்

பழைய நிலையிலேயே இருக்க முயற்சி செய்கின்றன. இதற்குக் காரணமாக அமைவது பொருள்களின் சமத்துவத் தன்மையே யாகும். மேலும் இப்பொருள்கள் தம்மீது பிறவிசைகள் தாக்கி, தம் நிலையில் மாற்றமுண்டாக்குவதை எதிர்க்கின்றன. எடுத்துக் காட்டாக, சுழற்சியின் போது ஏற்படும் மைய விலக்கு விசையை (centrifugal force) ஒரு சமத்துவ அல்லது நிலைம விசையாகக் கொள்ளலாம். மேற்கூறியவற்றில் நிலைம விசைகள் செயல்படும் போது அவைகளை அத்தொகுதியில் செய்யப்படும் பரிசோதனைகள் மூலம் கண்டறிந்து விடலாம். எனவே, முடுக்கமானது தனித் தன்மை கொண்டது அல்லது சார்பில்லாததொன்று என்று கருதப்பட்டது. ஆனால், ஐன்ஸ்டைன் சார்பியல் கொள்கையும் பொதுவானதாக்கி, அவற்றை முடுக்கமுள்ள தொகுதிகளுக்கும் பயன்படுத்துமாறு செய்தார். அதனால் முடுக்கத்தைத் தனித் தன்மை கொண்டது அல்லது சார்பில்லாதொன்று என்று கருத் வேண்டிய அவசியமில்லை என்று காட்டினார்.

நாம் இப்போது ஒரு தனிப்பட்ட ஈர்ப்பு முடுக்கத்தைப் (acceleration due to gravity) பற்றிக் காண்போம். இதனைப் புவிஈர்ப்பு முடுக்கம் என்றும் கூறி வந்துள்ளோம். இதற்கு அடிப்படையாக சில கருத்துக்களைக் கற்பித்துக் கொள்ளுதல் வேண்டும். தொலைவில் செயல்படல் (action at a distance) என்பது அப்படிப்பட்ட கருத்துக்களில் ஒன்றாக அமையும். இதன்படி மேலும் பொருள்களுக்கு இடையே ஈர்ப்புவிசை உண்டு என்ற எடுகோளினையும் ஏற்படுத்திக் கொள்ளுவதாக அமைகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு பொருண்மையை எடுத்துக் கொள் வோம். புவி அல்லது சூரியன் என்பவை நிறைய பொருண்மை கொண்ட பொருள்களாகும். இதன் சூழலில் ஒரு உள்ளுறை விசை (latent force) உண்டு. இவ்வெளியில் ஒரு பொருள் வந்தால் அதன்மீது இவ்விசை வினை புரிவதாகவும் அதனால் அப்பொருளில் ஓர் இயக்கத்தை ஏற்படுத்துவதாகவும் உள்ளது. இதன் விளைவாகத்தான் பொருள்கள் புவியை நோக்கி, புவியால் ஈர்க்கப்படுவன. போன்று விழுகின்றன. பொருண்மையின் சூழலில் பொருள்கள் இல்லாதபோதும் இந்த ஈர்ப்பு ஆற்றல் நிரந்தரமாகப் பரவியுள்ளது. பொருண்மையின் சூழலில் இத்தகையதொரு ஈர்ப்புப் பலன் உள்ளது. இப்புலத்தில் உள்ள பொருள்கள் இப்புலத்தினால் ஒரு ஈர்ப்பு முடுக்கத்தை பெற்றுச் செயல்படுகின்றன. சூரியனை ஒரு பெரிய பொருண்மையின் வடிவமாகக் கொண்டால் இது வெற்றிடத்தைத் தாண்டியுள்ள பல கோள்களையும் ஈர்ப்பு விசையால் ஈர்க்கின்றது. எனவே ஈர்ப்பு விசையானது தொலைவில் வெற்றிடத்தில் உள்ள பொருள்

களையும் ஈர்க்கும் தன்மையுடையது என்பது தெளிவாகும். ஈதர் என்ற ஒரு நிலையான கற்பிதமான ஊடகத்தைப் புகுத்தியபின், தொலைவில் செயல்படல் என்ற கருத்தால் விளைந்த குறைபாடு ஓரளவு குறைந்ததேயன்றி முழுமையாக நீக்கப்படும் வாய்ப்பினை பெறவில்லை. மேலும் ஈதர் என்ற கற்பித ஊடகம் எளிதில் விளக்கம் தர இயலாத சில பிரச்சினைகளைத் தன்னுடன் இணைத்துக் கொண்டு வந்து சேர்த்து விட்டது. பொதுச் சார்பியல் கொள்கை ஈர்ப்பு தோற்றப்பாட்டிற்கு ஒரு நவீன விளக்கத்தைக் கொடுத்ததின் விளைவாக தொலைவில் செயல்படல் என்ற கருத்திற்கே இடமில்லாமல் செய்து விட்டது.

சமநிலைக் கொள்கை (Principle of Equivalence)

ஐன்ஸ்ட்டைன் புரட்சிகரமான ஒரு கருத்தை வெளியிட்டார். அக் கருத்து வழி, முதுபழங் கொள்கைப் படியான ஈர்ப்புப் புலம் என்பதே செயற்கையானதொன்று ஆகும் என்ருர். ஏனெனில், தகுந்த ஒரு மேற்கோள் சட்டத்தில் இருந்து நோக்கும் நோக்கு நருக்கு இத்தகைய புலம் ஒன்று இருப்பதையே அறியாமல் இருக்கும் வாய்ப்பும் உண்டு. எனவே, இதற்குக் காரணமாக அமைவது தக்கதொரு மேற்கோள் சட்டமாக உள்ளது. ஒரு எடுத்துக்காட்டினைக் காண்போம். கயிற்றின் முனையில் ஒரு கல்லைக்கட்டி அதனைச் சுழற்றுவதாகக் கொள்வோம். கல்லானது ஒரு வட்டப்பாதையில் இயங்குகிறது. இக் கயிற்றில் ஒரு இழுப்பு விசை (tension) உண்டாகிறது. இதனை மைய நாடு விசை (centripetal force) என்றழைப்பர். அக்கல்லின்மீது ஒரு நோக்குநர் இருப்பதாகக் கொள்வோம். அவர் மைய நாடு விசைக்குச் சமமான ஆனல் நேர் எதிரான ஒரு மைய விலக்கு விசையை (centrifugal force) உணர்கிருர். ஆனல் கல்லைச் சுழற்றுபவர் இவ்வெதிர் விசையை உணர்வதில்லை. இந்த எதிர் விசை, கல்லானது வளைவுப் பாதையில் செல்வதால் விளைந்த ஒன்று என ஐன்ஸ்ட்டைன் எண்ணினுர். ஈர்ப்பு விசையை விளக்கும் நேர்க்கோடு வளைகோட்டு இயக்கம் (curvilinear motion) என்னும் கருத்தை வளைவு வெளியாக (curved space) மேலும் கருதினுர்.

மேற்கூறிய கருத்துக்களைத் தொகுத்து சமநிலைத் தத்துவமாக (Principle of Equivalence) பொதுமையாக ஆக்கினுர். இந்தத் தத்துவத்தின்படி ஈர்ப்புப் புலத்தில் நிகழும் விளைவுகளும், ஈர்ப்பு ஆற்றல் இல்லாது, வெளியில் இயங்கும் மேற்கோள் தொகுதியில் சீரான முடுக்கத்தால் ஏற்படும் தோற்றப்

பாடுகளும் விளைவுகளும் ஒன்றாகவே அமையும். மேற்கூறிய தொகுதியின் முடுக்கமானது ஈர்ப்புப் புலத்தின் கண் உள்ள முடுக்கத்திற்குச் சமமாகவும், ஆனால் நேர் எதிராகவும் இயங்கும். எனவே ஒன்றை மற்றொன்றாகவும் கருத இடமுண்டு.

மேற்கூறிய கோட்பாட்டினைச் சில எளிய எடுத்துக் காட்டுகளின் மூலம் விளக்கமாகச் சொல்லலாம். ஒரு மின்சார ஏறுமாடத்தில் ஒருவர் பிரயாணம் செய்வதாகக் கொள்வோம். இம் மின்சார ஏறு மாடத்தில் சன்னல்களே இல்லையெனக் கொள்வோம். சன்னல் இல்லாதபோது மாடத்தில் இருப்பவர்க்கு அவர் எங்கிருக்கிறார் என்பதை அவரே தெரிந்துகொள்ள முடியாத நிலையில் இருப்பர். ஏறுமாடத்தின் இயக்கம் பற்றியும் தெளிவில்லாமல் இருப்பார். இம் மாடம் கட்டிடத்தின் உச்சியில் இருப்பதாகக் கொள்வோம். அத்துடன் அதை இணைத்துள்ள இரும்புக் கயிறுகள் துண்டிக்கப்பட்டு மாடம் கீழ்நோக்கி ஈர்ப்பு விசையால் ஈர்க்கப்பட்டு வந்து கொண்டிருப்பதாகவும் கொள் வோம். அம் மாடத்தில் உள்ள அவர் தமது எடையை இழந்து விட்டது போன்ற உணர்வு ஏற்படும். அவரது எடையைத் தரைத் தளம் தடுத்து நிறுத்துவது போன்ற நிலை, இப்பொழுது இல்லை. அவர் ஒரு பொருளைக் கீழே போடுவாரானால் அது காற்றில் மிதப்பது போன்ற உணர்வினைக் கொடுக்கும். பொருளும், பொருளைப் போடுவோரும் ஒரே வேகத்தில் கீழ் நோக்கிச் சென்று கொண்டிருப்பதனால்தான் மேற்கூறிய உணர்வு ஏற்படுகிறது. இங்கு கிடைமட்டத்தில் எறியப்பட்ட எறி பொருள் (projectile) நேர் கோட்டில் இயங்கும். அவர் குதித்தால், மாடத்தின் கூரையை நோக்கி மிதந்து செல்வதாகத் தோன்றும். எனவே மாடத்தில் உள்ளவர்க்கு ஈர்ப்பு பற்றிய சான்றுகளோ அல்லது நினைப்போ இல்லாமல் இருக்கும். எனவே ஈர்ப்புப் புலனின் விளைவு இல்லாமல் செய்ய மேற்கூறிய ஏறுமாடம் போன்ற ஒரு தொகுதியினைக் கொண்டும் தக்க முடுக்கத்தை அதற்கு ஏற்படுத்தி இயங்கச் செய்தும் செய்துவிடலாம் என்பது தெளிவாகிறது.

இதற்கு மாறாக இந்த ஏறுமாடம் ஈர்ப்பு விசைக்கு அப்பாற் பட்ட ஓர் இடத்தில் இருப்பதாகக் கொள்வோம். இதற்கு ஈறிலி தூரம் வரை எந்தவொரு பொருண்மையும் இல்லையெனவும் கொள்வோம். ஏறு மாடத்தில் இணைக்கப்பட்ட இரும்புக் கயிற்றால் இம்மாடம் இழுக்கப்பட்டு, மேலே மாடம் சென்று கொண்டிருப்பதாகக் கொள்வோம். மாடமானது சீரான முடுக் கத்துடன் இயங்கிக் கொண்டு மேல் செல்கிறது. இம் முடுக்க

மானது ஈர்ப்பு முடுக்கத்திற்குச் சமமாக இருப்பதாகவும் எண்ணுவோம். இந்நிலையில் மாடத்தில் உள்ளவர் தமது இயற்கையான எடையை உணர்வார். பொருளைக் கீழே போட்டால், வழக்கம்போல் தான் கீழே விழும். குதித்தால், தரையின்மீது நின்று குதிப்பது போன்ற உணர்வு தோன்றும். கிடை மட்டத்தில் எறியப்பட்ட எறிபொருள் நேர் கோட்டில் இப்போது செல்லாது. இதற்கு மாறாக இதன் பாதையானது பரவளைவு (parabola) நிலையில் அமையும். ஈர்ப்புப் புலத்தில் ஏற்படுகின்ற ஒரு விளைவை அல்லது உணர்வை ஒரு தொகுதி யில் பெறலாம். மேற்கோள் தொகுதிக்குத் தக்கதொரு முடுக் கத்தை, ஈர்ப்புப் புலத்தில் உள்ள முடுக்கத்திற்குச் சமமான ஆனால் நேர்-எதிரான அளவு கொடுத்தால் இத் தொகுதியில் மேற்கூறிய உணர்வைப் பெறலாம். சீரான புலம் ஒன்றுக்கு மட்டுமே மாற்றாக ஒன்றை மேற்கோள் தொகுதியினைச் சொல்லலாம். இது ஒரு குறிப்பிட்ட வெளியின் மிகச் சிறிய பாகத்திற்கு மட்டுமே இயலும். வெளியின் பெரும் பாகங் களில் புலன் சீராக இல்லாது மாறுபாடுகள் இருக்கும். எனவே, ஒரு மேற்கோள் தொகுதியினை வைத்துக்கொண்டு மேற்சொன்ன விளைவினை ஏற்படுத்த முடியாது. மேலும், முடுக்கமுள்ளதும் முடுக்கமற்றதுமான தொகுதிகளைப் பயன் படுத்த வேண்டிய நிலை உருவாகிறது. எனவே, பிரச்சினை யானது மிகவும் சிக்கலாக மாறுகிறது என்பது தெளிவாகிறது.

நிலைமப் பொருண்மையும் ஈர்ப்புப் பொருண்மையும் சமமானவை என்பதற்கான சமநிலைத் தத்துவத்தின் விளக்கம்

பொருளானது இயக்கப்படும்பொழுது அல்லது நகர்த்தப் படும்பொழுது, அச் செயலை எதிர்த்து நிற்கமுயற்சி செய்யும் எதிர்ப்பு ஆற்றலைத்தான் பொருண்மை என்கிறோம். பொருளை இயங்க வைக்கும் விசையை எதிர்க்கும் தன்மையைப் பொருளின் சடத்துவத் தன்மை எனலாம். சடத்துவ எதிர்ப்புத் தன்மையின் அளவே நிலைமப் பொருண்மை ஆகும். ஒரு விசை F ஆல் ஒரு பொருளுக்கு a என்ற முடுக்கத்தைக் கொடுக்க முடிந்தால், நிலைமப் பொருண்மையானது $=\frac{F}{a}=m$ ஆகும். ஒரு பொருள் ஈர்ப்புப் புலத்தில் பெறும் ஈர்ப்பு விசையின் அளவே ஈர்ப்புப் பொருண்மையாகும். m என்ற பொருண்மையுடைய பொருளின் எடை $w=mg$ ஆகும். மேலும் பரிசோதனை மூலம் நிரூபணம் செய்தபடியும் $\frac{w}{g}=m$ என்பதாகவுள்ளது. எனவே, நிலைமப் பொருண்மையானது ஈர்ப்புப் பொருண்மைக்குச் சமமாகும்.

பொருளின் ஒரே தன்மைதான் சூழ்நிலைக்கேற்ப (நிலைமம் அல்லது ஈர்ப்பு) வெவ்வேருகத் தோன்றுகிறது. ஈர்ப்பு விசையானது இறுதியாகச் சொல்லப் போனல் நிலைம விசையாகும். ஒரு பொருள் வெளியில், முடுக்கப்பட்ட இயக்க நிலையிலோ மற்றும் ஈர்ப்புப் புலத்திலோ அல்லது ஈர்ப்புப் புலனில் நிலையாகவே இருக்கும். எனவே நிலைம விசையால் உண்டான புலத்திற்கும் ஈர்ப்பு விசையால் உண்டான புலத்திற் கும் வேறுபாடு கண்டறிவது முடியாத செயலாக அமையும்.

சமத்துவ நிலைக் கொள்கையானது மின் மற்றும் ஒளித் தொடர்புள்ள தோற்றப்பாடுகளுக்கு பொருந்துவதாகக் காணப் படுகிறது. எனவெ, எடுத்துக் காட்டாக, சீரான திசை வேகத்தில் இயங்கும் S என்ற தொகுதியில் ஒரு ஒளிக்கதிர் நேர் கோட்டிய லான பரவல் முறையில் செல்கிறது. ஆனல் அதே ஒளிக்கதிர் முடுக்கமுள்ள இயக்கம் கொண்ட S' என்ற தொகுதியில் நேர் கோட்டியலான பரவல் முறையில் செல்வதில்லை என்பதைக் காணலாம். மேற்கூறியவற்ருல், ஒளிக் கற்றைகள் பொதுவாக ஈர்ப்புப் புலனில் பரவும்போது வளைகோட்டியலான பரவல் முறையிலேயே செல்கிறது என்பது தெளிவாகிறது.

3-2. சார்பியல் ஈர்ப்பு விதியும் மின் கோவ்ஸ்கியின் நாற் பரிமாண வெளி-காலத் தொடர்பம்

முன்பு சொல்லப்பட்ட சமத்துவ நிலைத் தத்துவத்தின் அடிப் படையில் கணித வியலின் துணைகொண்டு ஈர்ப்பு பற்றிய விதி யொன்றினை உருவாக்கினர். இது நியூட்டனின் ஈர்ப்பு விதியைக் காட்டிலும் மிகவும் துல்லியமானது. இந்த நவீன சார்பியல் ஈர்ப்பு விதியை உருவாக்க டென்சார் கால்குலஸ் (Tensor Calculus) என்னும் துறை பற்றிய கணித வியல் நுட்ப அறிவு மிகவும் இன்றியமையாதது ஆகும். எனவே, மேற்கூறிய பிரச்சினை பற்றி ஆழச் செல்லாமல் மேலெழுந்த வாரியாகப் பார்ப்போம்.

மின்கோவ்ஸ்கியின் நாற்பரிமாண வெளி–காலத் தொடர்பம் (Minkowski's four dimensional space-time continuum)

சமநிலைத் தத்துவத்தின் அடிப்படையில் மேற்கூறிய மின்கோவ்ஸ்கியின் நாற்பரிமாண வெளி-காலத் தொடர்பமே, ஐன்ஸ்டீனின் பொது மாற்றம் ஈர்ப்பு கொள்கைகளுக்குத்

தொடக்க நிலையாக அமைகின்றது. 1908ஆம் ஆண்டில் மின் கோவ்ஸ்கி சிறப்புச் சார்பியல் கொள்கையின் தத்துவங்களையும் ரீமென் (Reimann) என்ற கணித வல்லுநரின் நாற்பரிமாண வடிவ கணிதத்தையும் பயன்படுத்தி, ஒரு புதிய கருத்தினைத் தோற்று வித்தார். இதனை மின்கோவ்ஸ்கியின் நாற்பரிமாண வெளி-காலத் தொடர்பம் என்பர். இச்சிறப்புச் சார்பியல் கொள்கையை, வடிவ கணிதத்தின் வாயிலாகக் காணலாம்.

1827ஆம் ஆண்டில் காஸ் (Gauss) என்பார் மேற்பரப்புகள் பற்றிய பொதுக் கொள்கையொன்றினை உருவாக்கினார். 1854ஆம் ஆண்டில் ரீமென் என்பார் ஈக்ளிடியன் (Euclidean) முப்பரிமாண வடிவ கணிதத்தைச் சிறப்பு வாய்ந்த வகையில் நாற்பரிமாண வடிவ கணிதமாகக் கருதலாம் என்று சுட்டிக் காட்டினார். ஆனால் இதற்கு வெளியானது வளைவானதாக இருக்கவேண்டும் என்றும் கூறினார் மேலும் ரீமென் கருத்துப்படி மூன்று பரிமாண வடிவியலில் என்னவெல்லாம் சரியாக அல்லது உண்மையென்று ஒப்புக்கொள்கிறோமோ அவையனைத்தும் பலபரிமாண வடி வியலில் உண்மையாக இருக்கும் என்றும் வலியுறுத்தினார். மின் கோவ்ஸ்கி நாற்பரிமாண வடிவ கணிதத்தைச் சிறப்புச் சார்பியல் கொள்கைக்காகப் பயன்படுத்தினார்.

S என்ற தொகுதியில் நடைபெறும் ஒரு நிகழ்ச்சியை நான்கு ஆயக் கூறுகளைக் கொண்டு வெளிப்படுத்தலாம். அவை முறையே x, y, z, t என்பனவாகும். இதே நிகழ்ச்சியினை S′ என்ற இயங்கு தொகுதியில் காட்சிப் பதிவு செய்வதாகக் கொள்வோம். S′ என்ற சட்டம் x அச்சின் திசையில் v என்ற திசை வேகத்தில் S ஐ விட்டு விலகிச் செல்வதாகக் கொள்வோம். $t = t' = 0$ என்ற கால நிலையில் S மற்றும் S′ம் இணைந்துள்ளன. நிகழ்ச்சியின் S′ஐ சார்ந்த ஆயங்கள் x', y', z', t' ஆகும். இவ்வாயங்கள் கீழ்க்கண்ட சமன்பாட்டின்படி மறுபடியும் அமையப் பெற்றிருத்தல் வேண்டும்.

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 \quad ...(1)$$

மின்கோவ்ஸ்கி மேலேயுள்ள சமன்பாட்டில் காலம் மற்றும் ஒளியின் வேகம் ஆகியவற்றின் இருமடி பெருக்கல் பலன் உள்ளது. இதனை ஒரு குறியோடு கொள்ளலாம் எனக் கருதினார். அதாவது $(-c^2t'^2)$ மற்றும் $(-c^2t'^2)$ ஆகியவற்றை நாற்பரிமாண வடிவியலில் நான்காவது ஆயத்தொலைவின் இரு மடியாக எண்ணலாம் என்று கூறினார். நான்கு ஆயத் தொலைவு

களும் சீரான குறிகளைக் கொண்டிருக்க ($-c^2t^2$)-க்கு மாற்றாக ($+w^2$) எனவும், ($-c^2t'^2$)-க்கு மாற்றாக ($+w'^2$) எனவும் கொள்ளலாம்.

$$\left.\begin{aligned} W &= ict \\ W' &= ict' \end{aligned}\right\} \qquad ...(2)$$

(இங்கு $i\ \sqrt{-1}$)

எனவே,

$$x^2 + y^2 + z^2 + W^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 + W'^2 \qquad ...(3)$$

இது நாற்பரிமாணத்தில் வெளியையும் காலத்தையும் இணைக்கும் தொடர்பாக உள்ளது. இதை மின்கோவ்ஸ்கி உலகு (Minowski World) அல்லது நாற்பரிமாண கால-வெளித் தொடர்பம் என்பர். இங்கு நான்கு ஆயத்தொலைவுகளாக x, y, z மற்றும் ict முறையே யுள்ளன. காலம் கற்பனையான நீளத்திற்குச் சமமாக இருக்கிறது. இந்நவீனக் கருத்துப்படி வெளி, காலம் என்ற இரு தனித்தனி உண்மைகளாகக் கருதப்பட்டவை மாறி, அவற்றின் இரண்டறக் கலந்த தன்மையே தனித்து நிற்கும் என்னும் உண்மைநிலை உறுதிப்படுத்தப்பட்டது. இத்தகைய வெளி-காலத் தொகுதியில் ஒரு புள்ளியை "உலகப் புள்ளி" (World Point) என்பர். இத்தொகுதியில் துகளின் இயக்கத்தை உலகக் கோடு (World Line) என்ற நிலையில் சொல்லலாம். எனவே, துகளின் பாதை காலத்தைப் பற்றியது என்பது வெளிப்படையாகிறது.

நாற்பரிமாண வெளியில் இரண்டு புள்ளிகளின் ஆயங்கள் முறையே (x_1, y_1, z_1, W_1) மற்றும் (x_2, y_2, z_2, W_2) எனக் கொள்வோம். இவ்விரு புள்ளிகளுக்கு மிடைப்பட்ட தூரத்தை S எனக் கொள்வாம்.

$$S^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + (W_2 - W_1)^2 \qquad ...(4)$$

இச்சமன்பாடு மாற்றமின்றி அமைவது (invariant) எனக் காட்ட இயலும். அதாவது இதன் பொதுவடிவமானது எல்லாத் தொகுதிகளிலும் ஒன்றே; மாற்றச் சமன்பாடுகள் மூலம் பிற தொகுதிகளுக்கு மாற்றினாலும் மாற்றமின்றியே அமையும். எனவே, மின்கோவ்ஸ்கி உலகில் எந்தத் ஆயத் தொகுதியினையும் சாராமல் துகள்களின் உலகக் கோடுகளை எடுத்துரைக்கலாம்.

உலகக் கோட்டின் கூறுக் கேற்ப (World Line) மாற்றமிலாத தன்மைக்கான சமன்பாட்டினைக் கீழ்க்கண்டவாறு சொல்லலாம்.

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 + dW^2 \\ &= dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2 \qquad \ldots(5) \end{aligned}$$

எனவே, இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரத்தை அதாவது நீளத்தை, வரையறுக்க மூன்று பரிமாணங்கள் dx, dy, dz மட்டும் போதாது. காலம் பற்றிய dt என்ற ஒரு பரிமாணமும் தேவை என்பது தெளிவாகிறது. S மற்றும் S′ என்ற தொகுதிகளை எடுத்துக்கொள்வோம். S என்ற மேற்கோள் தொகுதியானது நிலையாகவும் S′ என்ற தொகுதி x அச்சின் திசையில் v என்ற திசை வேகத்தில் Sஐ விட்டு விலகிச் செல்வதாகவும் கொள்வோம். S தொகுதியின் ஆயங்கள் (x, y, z, t) எனவும் கொள்வோம். ஒரு புள்ளியை Sயிலிருந்து S′ மாற்றுவதற்கு மாற்றச் சமன்பாடுகள் பயன்படுகின்றன. மின்கோவ்ஸ்கி இத்தகைய மாற்றத்தை ஒப்புநோக்கி ஒரு உண்மையை வலியுறுத்தியுள்ளார். இதன்படி மேற்கூறிய மாற்றமானது, இங்கு x, y, z, W அச்சுகள் xW தளத்தில் என்ற கோண அளவில் சுழல்வதற்குச் சமமானதாகும்.

அவ்வாறாகுல்,

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \ldots(6)$$

$\therefore v<c$, $\cos \therefore \theta > 1$; எனவே θ என்பது ஒரு கற்பனையான கோணமாகும். இவ்வுண்மை நான்காவது கால ஆயமானது கற்பனையானதொன்று என்பதைக் கூறுவதாக அமையும். தற்போது y மற்றும் z அச்சுகள் வழியே இயக்கமில்லை. எனவே அவைகளை அச்சுச் சுழற்சியின்போது மாறாதவைகளாகக் கொள்ளலாம். இதன் பின்னணியில் வடிவியல் காட்சியாக நாற்பரிமான தொடர்பத்தைக் காணலாம். இதில் v என்ற ஒரு தனிப்பட்ட திசை வேகத்தின் லோராண்ட்ஸ் மாற்றத்தை x மற்றும் W அச்சுகளின் சுழல் இடப்பெயர்ச்சியாகவும், அவை சுழன்ற கோணத்தை θ எனவும் ஏற்றுக்கொள்ளலாம். இத்தகைய நாற்பரிமாண வெளியின் காட்சியை 'வெளி-காலத் தொடர்பம்' (space-time continuum) எனலாம். இரு புள்ளிகளுக்கான ஆயத் தொலைவுகளின் வேறுபாட்டினை முறையே dx, dy, dz, dw என இத்தொடர்பத்தில் கொண்டால், ds என்பது இரு புள்ளிகளுக்கிடைப்பட்ட தூரமாகக் கொள்ளலாம்,

ஆனால் இக்கணியம் பொதுவாகப் 'புள்ளி நிகழ்ச்சி' (point event) அல்லது 'இடை வெளி' (interval) என்று அழைக்கப் படுகிறது. இடைப்பட்ட தூரம் என்பது இதற்கொப்பான முப்பரிமாண வெளிக்குப் பயன்படுத்தப்படுவதாகும்.

இத்தொடர்பம் ஆனது கீழ்க்கண்ட சமன்பாட்டு வடிவில் குறிக்கப்படுகிறது.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2 \qquad ...(7)$$

பௌதிக உலகில் நடைபெறும் நிகழ்ச்சிகளின் திசைகளை விளக்குவதாக இச்சமன்பாடு அமைகின்றது. இத்தொடர்பத்தில் நேர்கோட்டிற்கு ஒப்பான ஒரு கோட்டினைக் கொள்ளலாம். இக்கோடு dsஐ மிகச் சிறியதாக்குவதாகவுள்ளது. இதனை ஜியோடெசிக் என்பர். மேற்பரப்பில் இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் மிகச் சிறிய தூரமே ஜியோடெசிக் (geodesic) அல்லது புவியின் மேற் பகுதிக் கோடு ஆகும். ஒரு துகளின் தன்மையைக் (history) கீழ்க்கண்ட தொகை (integral) மூலம் வெளிப்படுத்தலாம்.

$$\int_A^B ds$$

A மற்றும் B என்ற இரு புள்ளிகளும் 'உலகக் கோட்டில்' (World-Line) அமைந்த இரு புள்ளிகளாகும். எனவே,

$$S\int_A^B ds = 0 \qquad ...(8)$$

என்பது, ஒரு 'ஜியோடெசிக்' (Geodesic Line) ஆகும். இதனைப் புவியின் மேற்பகுதிக் கோடு எனவும் கூறலாம். எல்லா வகை ஆயத் தொகுதிகளிலும் இதன் மதிப்பு மாறாது இருப்பதால், இது நேர்கோட்டு மற்றும் வளைகோட்டு இயக்கத் தொகுதி களுக்கும் பொருந்தும்.

நாற்பரிமாண தொடர்பத்திற்கான சமன்பாட்டில் $ds = 0$ எனக் கொண்டால்,

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2 = 0$$

$$c^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} \qquad ...(9)$$

இக்கோவை ஏதோ ஒன்று ஒளியின் திசை வேகத்தோடு இயங்குகிறது என்பதை எடுத்துச் சொல்வதாகவுள்ளது. எனவே, வெளி-காலத் தொடர்பம் பற்றிய சமன்பாட்டில் $ds = 0$ என்று கொண்டால்,

$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2 = 0$ என்பது அவ்வுலகில் ஒரு ஒளிக் கதிரைக் குறிப்பதாகும். $ds = 0$ ஆக உள்ளதால் ஒரு ஒளிக்கதிருக்கான உலகக் கோடானது பூச்சிய நீளம் கொண்ட ஜியோடெசிக் ஆகும்.

சார்பியல் சூத்திரங்களில் காலம் மற்றும் வெளி ஆயங்கள் சமச் சீரான பங்கினை மேற்கொண்டுள்ளன என்பது தெளிவாகும். ஆனால், அவை பூரணமாகச் சமச்சீரான பங்கேற்றுள்ளன என்று சொல்வது மிகையாகும். கொள்கையின் முறைமையான தோற்றுவாய் கூற்றிலேயே மாறுபாடு உள்ளது தெளிவாகும். ict என்ற கணியம்தான் (t என்பது அல்ல) x, y, z மாறிகளுக்கு ஏற்ப சமச்சீரான பங்கு கொண்டுள்ளது. எனவே, எந்தவொரு கொள்கையும் இரண்டு அடிப்படையான உண்மைகளைப் புறக்கணிக்க இயலாது. வெளிமாறிகள் மாறுவது ஒரு வகையாகவும் காலமாறி மாறுவது மறுவகையாகவும் இருக்க இயலாது. காலவோட்டமானது ஒரே திசையில்தான் இயங்கும். எளிமை மிகு பௌதிக பருப் பொருள்களாவன. அணு, எலெக்ட்ரான் முதலியவைகள் உறுதியாகக் காலத்தை வைத்துத்தான் இருக்கின்றன. நுண்ணியலான அளவில் இவ்வுண்மை முற்றிலும் பொருந்தும். எனவே வெளிகாலத் தொடர்பமானது காலத் திசையோடு, ஒருபடிக்குரிய (linear) இயலமைப்பு (structure) கொண்டுள்ளது எனலாம்.

ஈர்ப்புப் பிரச்சனைக்கு ஐன்ஸ்ட்டைனின் தீர்வு

மின்கோவ்ஸ்கி நாற்பரிமாண வெளி-காலத் தொடர்பத்தில் ஒரு பருப்பொருள் இருந்தால் அத்தொடர்பத்தின் விளைவினை உருக்குலைப்பதாக இருக்கும். ஐன்ஸ்ட்டைன் மேற்கூறிய கருத்தினைத் தற்கோளாகக் (assumption) கொண்டார். ஈர்ப்பு என்பது பருப்பொருள் காரணமாக எழுவது ஆகும். நாற்பரிமாண உலகில் உருக் குலைப்பு ஏற்படுவதால் ஈர்ப்புப் புலம் தோன்றுகிறது எனக் கருதலாம். ஏனெனில், உருக்குலைவின் பயனாக கீழ்ச் சொன்ன விளைவு ஏற்படுத்தப்படுகிறது. செவ்வக ஆயங்களில் எல்லாயிடங்களிலும் $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\, dt^2$ என்பது முடியாத ஒன்றாகிவிடும். இவற்றையும் ஐன்ஸ்ட்டைன் தற்கோளாகக் கொண்டார்.

சமத்துவ நிலைக் கொள்கையின்படி புவிஈர்ப்புப் புலத்தினுல் விளையும் விளைவுகளைக் கண்டோம். இதே முடிவினை மேற்கோள் ஆயத் தொகுதிகளுக்கு தக்கதொரு முடுக்கத்தைக் கொடுத்து பெறலாம். மேலும் உலகக் கோடானது எல்லா மேற்கோள் தொகுதிகளிலும். அதாவது நேர்கோட்டு தொகுதி அல்லது வளை கோட்டு தொகுதிகளிலும் மாருது எனவும் கண்டோம். மேற்கூறியவற்ருல் ஈர்ப்பிலே கட்டுண்ட பொருண்மைகள் உருக்குலைந்த வெளியில் ஜியோடெசிக் வழியாகச் செல்லும் ஈர்ப்புப் புலனில் உள்ள எந்தவொரு துகளுக்கும் ஏற்ற உலகக்கோடு கீழ்க் கண்டவாறு அமைந்துள்ளது எனலாம்.

$$S \int_A^B ds = 0$$ இது ஒரு ஜியோடெசிக் ஆகும்.

மேற்கூறிய சமன்பாடு முற்றிலும் வடிவ கணிதத்தைச் சார்ந்தது. எனவே, எவ்வகை இயல்பு மற்றும் பொருண்மை கொண்ட துகள்களாக இருப்பினும் கொடுக்கப்பட்ட புலத்தில் மேற்கூறியவாறுதான் இயங்கும். எல்லாவகைப் பொருள் களுக்கும் ஈர்ப்பு முடுக்கம் (acceleration due to gravity) ஒன்றுதான் என்பது மேற்கூறியவற்றிற்கு உரிய உண்மையாக அமையும். ஈர்ப்புப் புலத்தின் தனித் தன்மையும் இதுவாகத் தான் உள்ளது. இவ்வுண்மை, பரிசோதனைகள் மூலம் நிரூபிக்கப் பட்டும் உள்ளது.

ஈர்ப்புப் புலத்தில் ஒரு துகளின் பாதையை எவ்வாறு கண்டறியலாம் என்று காண்போம். முதற்கண், வெளியானது பொருண்மைகளுச்கு அருகில் எவ்விதமாக உருக்குலைவு அடைந் துள்ளது என்று காண வேண்டியது அவசியமாகும். அதன்பிறகு ஒரு கண ஆயத்தொலைவினைத் தெரிந்தெடுத்து, dsஐ இதன் மூலமாக வெளிப்படுத்தலாம். இரண்டு புள்ளிகளுக்கிடைப்பட்ட உலகக் கோடுகளுக்கான சமன்பாடுகளை மேற்கூறிய ஆயத் தொலைகளின் மூலமாகவும் கீழ்க்கண்ட சமன்பாட்டினைப் பயன் படுத்தியும் பெறலாம்.

$$S \int_A^B ds = 0$$

மேற்கூறிய ஆயத் தொலைகளில் எதை வேண்டுமானுலும் வளைவு வெளியில் பயன்படுத்த இயலும்.

வெளியின் எல்லாயிடங்களிலும் பயன்படுத்தக்கூடிய ஒரு தொகுதியின் ஆயங்களை முறையே x_1, x_2, x_3, x_4 எனக் கொள்வோம். வளைவு மின்கோவ்ஸ்கியின் வெளி-காலத் தொடர்பத்தில் ஒரு சிறிய பகுதி உருக்குலைவு இல்லாமல் இருக்க வாய்ப்புண்டு. அவ்விடத்தில் அமைந்தசெவ்வக ஆயத் தொலைகள்.

$ds^2 = dx^2+dy^2+dz^2+dW^2$ என்பவைவரையப்பட்டிருப்பதாகக் கொள்வோம். ஒரு சிறிய பகுதியின் ஆயத் தொலைகளை $x, y. z, W$ என்ற செவ்வக ஆயத் தொலைகளை x_1, x_2, x_3, w_4 ஆகியவற்றின் சார்பலனாக (function) உள்ளதாகக் கொண்டு,

$$dx = \frac{\partial x}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial x}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial x}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial x}{\partial x_4} dx_4 \qquad \ldots(10)$$

இதே போன்ற கோவைகள் dy, dz மற்றும் dW ஆகியவைகளுக்கும் உண்டெனக் கொள்வோம். dx, dy, dz, dW ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களை $ds^2 = dx^2+dy^2+dz^2+dW^1$ என்ற சமன்பாட்டில் பதிலீடு செய்தால் ds^2க்கு ஒரு சிக்கலான கோவையைப் பெறலாம். அக்கோவையில் gs என்பன போன்ற கணியங்கள் இடம் பெறுகின்றன. இவையெல்லாம் ஆயத் தொலைகள் x_1, x_2, x_3, x_4 மற்றும் dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 ஆகியவற்றின் சார்பலன்களாக அமைகின்றன. மேற்கூறிய சிக்கல்கள் மிகுந்த ds^2க்கு ஆனகோவையைச்சுருக்கியவடிவில் $ds^2 = \Sigma g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu$ என்றவாறு அமைக்கலாம். இது μ மற்றும் ν ஆகியவற்றின் நான்கு (1, 2, 3, 4) மதிப்புகளின் 16 சேர்வுகளின்(combinations) கூட்டுத் தொகையை விளக்குவதாக அமையும். மேலும் $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ வளைவு வெளியின் தன்மைகள், gக்களிடையேயுள்ள தொடர்பு போன்றவைகள் ரீமென் மற்றும் பிற கணித இயல் வல்லுநர்களால் படைக்கப்பட்டன. ஐன்ஸ்டைன் இம்முடிவுகளைக் கையாண்டார். ஈர்ப்புப்புலத்தில் gக்களின் மதிப்பினைக் கண்டறிய வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகளைப் (differential equations) பயன்படுத்தினர். நியூட்டனின் ஈர்ப்பு விதியும் இவருக்குத் துணைபுரிவதாக அமைந்தது. ஈர்ப்புப் புலனில்லாத நிலையில் வெளியானது உருக்குலைவின்றி இருக்கும். எனவே மேற்கூறிய சமன்பாடுகள் இதனையும் தன்னகத்தே கொண்டு விளக்குவதாக இருத்தல் வேண்டும். இவைகளையும் டென்சார்களையும் அடிப்படையாகக் கொண்டு, ஒரு சிறிய கோள் பெரிய ஈர்ப்புள்ள பொருண்மையைச் சுற்றும்போது உள்ள இயக்கம்

பற்றிய விதியைப் படைத்தார். ஈண்டு அம் முடிவுகளை மட்டும் பார்ப்போம். ஒரு பெரிய ஈர்ப்பு உள்ள பொருளைச் சுற்றிச் சுழலும் ஒரு கோளின் (planet) இயக்கத்தைப் பற்றிய வகைக் கெழுச் சமன்பாடு கீழ்க்கண்டவாறு அமையும்.

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{a}{h^2u^2} + 3a \qquad \ldots(11)$$

இங்கு, $u = \frac{1}{r}$; r = ஆரத் திசையில் (radius vector)

$a = Mu^2$; M = அதிக ஈர்ப்புக் கொண்ட பொருளின் பொருண்மை.

h = பரப்பளவு திசை வேகம் (areal velocity) இதற்கொப்பான நியூட்டனின் சமன்பாடு

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{a}{h^2 u^2} \qquad \ldots(12)$$

ஐன்ஸ்ட்டைனின் சமன்பாட்டில் $3a$ என்ற ஒரு உறுப்பு (term) அதிகமாக இருப்பது தெளிவாகிறது. கோள்களின் பாதையில் $\frac{a}{h^2u^2}$ என்ற உறுப்பின் மதிப்பினை நோக்கும்போது $3a$ என்ற உறுப்பு மிகச் சிறியதாக அமையும். நியூட்டனின் சமன்பாடு, ஈர்ப்புக் கவர்ச்சி பற்றிய நியூட்டனின் எதிர் விகித இருமடி விதியை அடிப்படையாகக் கொண்டு விழுந்தது இதே போன்று ஐன்ஸ்ட்டைனின் சமன்பாடு புவிஈர்ப்பு பற்றிய நவீன சார்பியல் விதியை அடிப்படையாகக் கொண்டு படைக்கப்பட்டது ஆகும்.

3-3. ஐன்ஸ்ட்டைனின் ஈர்ப்புக் கொள்கை—பரிசோதனை நிருபணங்கள்

ஐன்ஸ்ட்டைன் தமது ஈர்ப்புக் கொள்கைக்கான மூன்று வான இயல்பியல் (astro-physical) தோற்றப்பாடுகளை பரிசோதனை நிரூபணத்திற்காக எடுத்துக் கொண்டார்.

(a) புதன் என்னும் கோள் கதிரவனை நெருங்குமிடம் முன்னேறி வரல் (advance of the penihelian of the planet mercury),

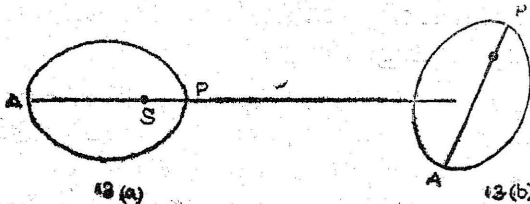
(b) ஈர்ப்புப் புலனுல் ஒளிக் கதிரின் வளைவு, மற்றும்

(c) நிறமாலைக் கோடுகளின் பெயர்ச்சி.

இத்தகைய பரிசோதனைகள் எவ்வாறு நடந்தன என்று பார்ப்போம்.

(a) ஐன்ஸ்ட்டைனின் கருத்துப்படி ஒரு பெரிய பொருண்மைக்கு அருகில் உள்ள வெளியானது வளைவானதாகும். எனவே இதன் அருகில் செல்லும் பொருள்கள் இவ்வெளியில் வளைவான பாதையில் பயணம் செய்கின்றன. இவ்வெளியின் வளைவுத் தன்மை பொருள் பெரிய பொருண்மைக்கு அருகில் நெருங்க நெருங்க அதிகரித்த வண்ணமுள்ளது. கோள்கள், சூரியனைச் சுற்றும் பாதைகளை இவ்விதமான அடிப்படையில் விளக்கலாம், நெடுந்தொலைவில் உள்ள கோள்களின் பாதை வட்டப் பாதையாக அமையும். இந் நிலையில் ஐன்ஸ்ட்டைனின் ஈர்ப்பு விதியானது எளிதானதாகி நியூட்டனின் எதிர்விகித இருமடி விதியாக (Newton's Inverse Square Law) வடிவெடுக்கின்றது. ஆனால் புதன் (Mercury) என்ற கோள் சூரியனுக்கு மிக அருகில் உள்ளது. எனவே, இதன் பாதையானது உரல் வட்டமாக (வேற்றுமைய — eccentric) அமைந்துள்ளது. இந்நிலையில் ஐன்ஸ்ட்டைன் விதி நியூட்டனின் விதியிலிருந்து மாறுபட்டு அமைகிறது.

நியூட்டனின் எதிர் விகித இருமடி விதியைப் பயன்படுத்தி, சூரியத் தொகுதியில் உள்ள கோள்கள் சூரியனை நீள் வட்டச் சுற்றுப் பாதையில் (elliptic orbit) வலம் வருகின்றன என்று கூறலாம். சூரியன் இந் நீள் வட்டத்தின் ஒரு குவியத்தில் இருப்பதாகவும் அமையும். படத்தில் 13(a) காட்டியபடி *P* என்ற புள்ளி சூரியனைச் சுற்றும் புதன் கோளின் பாதையில் உள்ளது. இப்புள்ளி சூரியனுக்கு (S) மிக அருகில் உள்ளது. இதனை பெரிகீலியன் (Perihelion — அருகுப் புள்ளி) என்பர்.



படம் 13. புதன் சூரியனைச் சுற்றுவது

ஆனால் A என்ற புள்ளி சூரியனுக்குச் சற்று தொலைவில் உள்ளது. எனவே இதனை அப்கீலியன் (aphelion — தொலைவுப் புள்ளி) என்பர். A, P என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டிற்கு

நீள் வட்டச் சுற்றுப் பாதையின் பேரச்சு அல்லது நெட்டச்சு (major axis) என்று பெயர். நியூட்டனின் கொள்கைப்படி, தனித்து இயங்கி சூரியனை வலம் வரும் ஒரு கோளின் நீள் வட்டப் பாதையின் பேரச்சு வெளியில் (space) நிலையாக மாறாமல் இருத்தல் வேண்டும். ஆனால் சூரிய குடும்பத்தில் உள்ள பல கோள்களின் கவர்ச்சி விசையால், இக் கோளின் நீள் வட்டப் பாதையின் நேரச் சுழற்றப்படுகிறது. படம் 13 (a)யில் காட்டிய படி உள்ள அச்சு, பல ஆண்டுகளுக்குப் பின் படம் 13 (b)யில் காட்டியபடி அமையும். இவ்விதமான நிதானமான நேரச்சின் இயக்கமே அருகுப் புள்ளியின் முன்னேற்ற இயக்கம் (advance of the perihelion) எனப்படும். இது ஓர் அருகுப் புள்ளியின் (perihelion) சூரியனைப் பற்றிய அச்சுச் சுழற்சி (precession) யாகும்.

புதன் கோளைப் பற்றி விவரங்களைக் காண்போம். அருகுப் புள்ளி அமைந்துள்ள அச்சில் சுழற்சி ஏற்படுகிறது. அச் சுழற்சியின் வீதம் ஒரு நூற்றாண்டுக்கு, 574 விநாடிகள் என்ற கோண அளவில் மாறுபாடு அடைகிறது. [ஒரு செங்கோணத்தில் 3,24,000 செகண்டுகள் அளவுள்ள வளைவரை பாகங்கள் உள்ளன]. அருகில் உள்ள மற்ற கிரகங்களின் ஈர்ப்பு விசையின் காரணமாக 532 செகண்டுகள் என்ற அளவில் இக் கோள் பாதை மாறுதல் அடைவதாக நியூட்டனின் கொள்கையை அடிப்படை யாகக் கொண்டு கணக்கிட்டார்கள். ஆனால் கணக்கிற்கு ஒவ்வாமல் 42 செகண்டுகள் எஞ்சி நின்றன. புதன் என்ற இந்தக் கோளை அடுத்து மற்றொரு கோளும் இருக்கக்கூடும் எனவும், அதன் ஈர்ப்பு விசைதான் புதனின் கோள் பாதையை மாற்றக் கூடும் எனவும் சில விஞ்ஞானிகள் கருதினார்கள். இக் கோளின் பெயரை வல்கன் (Vaulcan) எனவும் சொன்னார்கள். ஆனால் நடைமுறையில் இத்தகைய கோள் ஒன்றினைக் கண்டுபிடிக்க இயலவில்லை.

சார்பியல் கொள்கையின் விளைவாகத் தாம் இயற்றியிருந்த சமன்பாடுத் தொடர்புகளைச் சீராகப் பயன்படுத்தி, புதன் என்ற கோளின் கோள் பாதைக் கணக்குகளை ஐன்ஸ்ட்டைன் வரை யறுத்தார். நீள் வட்டப் பாதையில் இயங்கிச் செல்வதாகக் கொண்டால், புதன் கோளின் வேகம் மாற்றமடையும் என்பதனை ஐன்ஸ்ட்டைன் முன் கூட்டியே யூகித்து இருந்தார். கோளின் வேகம் மாறுபாடு அடைவதால் அதன் பொருண்மையும் மாறு பட்டுக் கொண்டு இருக்கும். இதன் காரணமாக அக் கோளின் கோள் பாதையே சுழலத் தொடங்குமென்பதையும், அவர்

அறிந்தவராக இருந்தார். புதன் என்ற கோளின் பாதையின் வட்டத்திற்குத் துல்லியமாக 42 செகண்டுகள் அளவில் சரிவு ஏற்படக் கூடும் என்பதை அவர் கணக்கிட்டுக் கண்டறிந்தார். இதனைச் சோதனைகள் மூலமும் நிரூபித்தார்:

வானநூல் ஆராய்ச்சியாளர்களுக்கு இதுவரை புரியாத புதிராக இருந்த கருத்து இப்பொழுது தெளிவாயிற்று. ஐன்ஸ்டைன் தமது ஈர்ப்புக் கொள்கையின் பயனாக இப் புதிரை எளிதாக்கினார். பொதுச் சார்பியல் கோட்பாட்டிற்குச் சிறப்பான, வியப்பிற்குரிய ஒரு நிரூபணமும் கிடைத்து விட்டது.

(b) ஈர்ப்புப் புலனும் ஒளிக் கதிரின் வளைவும்: சிறப்புச் சார்பியல் கொள்கையின் விளக்கத்தினால் எல்லா வகை ஆற்றல் களுக்கும் சமமான அல்லது அதற்கேற்ப பொருண்மையின் அளவு உண்டு எனக் கண்டோம், எனவே ஆற்றலுக்குச் சமமான பொருண்மை உண்டு. இப் பொருண்மையானது நிலைமத் தன்மை (inertial) யுடையதாகும். ஆனால் பொதுச் சார்பியலின் கூற்றுப் படி ஒரு பொருளின் நிலைமத் தன்மையுடைய பொருண்மை யானது, அதன் ஈர்ப்புப் பொருண்மைக்குச் (gravitational mass) சமமாகும். இப்போது ஓர் ஒளிக்குவான்டத்தை (qantumu of light) எடுத்துக் கொள்வோம். இக்குவான்டத்தின் ஆற்றல் $h\nu$ எனக் கொள்வோம். (h — பிளாங்க்கின் மாறிலி; ν — ஒளியின் அதிர்வெண்). மேற்கூறியபடி இவ்வாற்றலுக்கு ஒப்பான நிலைமத் தன்மையுடைய பொருண்மை = ஈர்ப்புப் பொருண்மை $\frac{h\nu}{c^2}$ ஆகும். மேலும், பொருண்மையானது வெளி-கால தொடர்ச்சியில் உருக்குலைவு ஏற்படுத்துகிறது. இதற்கு ஒப்பாக பொருண்மை அருகிலுள்ள வெளியின் ஒளி விலகலெண்ணில் மாற்றத்தை உண்டு பண்ணுகிறது என்று கொள்ளலாம். சூரியனை ஒரு பெரிய பொருண்மை எனக் கொண்டு நோக்கலாம். எனவே, இதன் அருகில் கடந்து செல்லும் ஒளியானது சிறிதளவு சூரியனை நோக்கி விலகுகிறது. இதே போன்று ஒரு நட்சத் திரத்தின் ஒளியானது சூரியனின் அருகில் செல்வதாகக் கொள்வோம். ஐன்ஸ்டைனின் கொள்கைப்படி இவ்வொளியின் பாதையில் சிறிய அளவு திசை மாற்றம் (Δ) ஏற்படுகிறது என்பது கூறப்படுகிறது. [படம் (14) காட்டியுள்ளபடி.]

$$\text{திசை மாற்றம் } \Delta = \frac{4GM}{ac^2} \quad \ldots(1)$$

G—ஈர்ப்பு மாறிலி

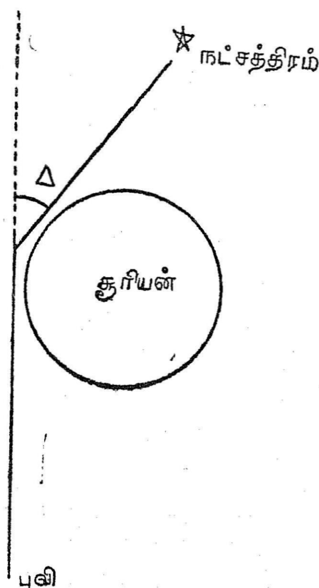
M—சூரியனின் பொருண்மை

a—சூரியனின் ஆரம்

△—திசை மாற்றம் (in radian measure)

c—ஒளியின் வேகம்

மேற்சொன்னவற்றின் மதிப்புகளைத் திசை மாற்ற சமன்பாட்டில் பொருத்தி ஒளியின் திசை மாற்றத்தைக் கணக்கிடலாம். இவ்வாறு கணக்கிட்டு திசை மாற்றத்தின் மதிப்பு $\Delta = 1.74$ செகண்ட் (seconds) எனக் கண்டுள்ளனர்.



படம் 14. ஐன்ஸ்ட்டைன் விளைவு

சூரியனின் ஒளி மிகவும் பிரகாசமாக இருப்பதால், இதனைப் பூரண சூரிய கிரகணம் ஏற்படும் ஒரு நிலையில்தான் காண முடியும். பூமிக்கும் சூரியனுக்கும் இடையே சந்திரன் வந்து சூரியனை முழுதும் மறைக்கும் நிலையில் பூரண சூரிய கிரஹணம் ஏற்படும். பொதுச் சார்பியல் கொள்கையை நிரூபிக்கத்தக்க ஒரு சூழல் 1919ஆம் ஆண்டு மே மாதம் 29ஆம் நாள் வாய்த்தது. பின்னர் 1922இல் ஒரு முறை வாய்ப்புக் கிட்டியது. முதலில் கூறிய நாளன்று, பூரண கிரஹணம் இடப வான்மனை (ரிஷபராசி)

விண்மீன் கூட்டத்தைச் சார்ந்த ஹையாடீஸ் என்ற நட்சத்திரக் கூட்டத்திற்கும் பூமிக்கும் இடையே சூரியன் காணப்பட்டது.

ஹையாடீஸ் என்ற கூட்டம் வட்ட அமைப்பில் 1·74 செகண்ட் அளவில் மாறுபட்டுக் காணப்படும் என்று தீர்க்கமாக ஐன்ஸ்ட்டைன் அறிவித்தார். பிரிட்டிஷ் வானாராய்ச்சிக் கழகம் பிரேசில், மேற்கு ஆப்பிரிக்கா ஆகிய இடங்களில் சென்று புகைப் படங்கள் எடுத்தன. முன்பு எடுத்த புகைப் படங்களுடன் ஒப்பிடுகையில் வட்ட அமைப்பில் 1·98 செகண்ட் அளவில் ஹையாடீஸ் கூட்டத்தின் அமைப்பு மாறுதல் அடைந்திருப் பதை பிரேசில் சென்ற குழுவினர் கண்டனர். ஐன்ஸ்ட்டைன் கூறிய அளவும் இந்த அளவும் பெருமளவில் ஒத்ததாக இருந்ததால், பொதுச் சார்பியல் கொள்கைக்குத் தக்க நிரூபணம் கிடைத்துவிட்டது என்று ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்டது.

(c) நிறமாலைக் கோடுகளின் பெயர்ச்சி: (Shift of Spectral Lines): இங்கு நாம் காணப்போவது ஐன்ஸ்ட்டைனின் கொள்கைக்கான மூன்றுவது நிரூபணம் பற்றிய உண்மையாகும். ஒளியானது மிகுதியான ஈர்ப்புப் புலத்திலிருந்து வெளிப்படும் போது அதன் அதிர்வெண் சிறிதளவிலே குறைகிறது அல்லது ஒளியின் அலை நீளம் அதிகரிக்கின்றது. ஒளிக் குவான்டம் தன்னகத்தே ஆற்றலைக் ($h\nu$) கொண்டுள்ளது. இதற்கொப்பான பொருண்மையுண்டு. இக் குவான்டம் ஈர்ப்பு விசை (கவர்ச்சி விசை)க்கு எதிராக செயலாற்ற வேண்டியுள்ளது. எனவே இதன் ஆற்றலில் குறைவு ஏற்படுகின்றது. அதனுல் அதன் அதிர்வு எண் குறைகிறது.

மேற்சொன்ன காரணத்தினுல்தான் சூரியனுல் வெளி யிடப்படும் நிறமாலைக் கோடுகள் நிறமாலையின் சிவப்பு வண்ண இறுதிப் பகுதியை நோக்கிப் பெயர்ச்சி பெற்றுள்ளன. ஈர்ப்பு விசை குறைவான பிற புவியியல் ஒளி மூலங்களால் வெளியிடப் படும் நிற மாலைகளுடன் சூரியனின் நிறமாலையை ஒப்பிடும்போது இக் கோடுகளின் பெயர்ச்சி நன்கு புலனுகும் ஃபிரான் ஹோஃபர் வரிகளின் (கோடுகள்) (Fraun-hofer lines) பெயர்ச்சிக்கு 'ஐன்ஸ்ட்டைனின் பெயர்ச்சி' (Einstein shift) என்றும் மறு பெயர் உண்டு. இத் தொடர்பின் கோட்பாட்டின்படி ஐன்ஸ்ட்டைன் பெயர்ச்சிக்கு ஒரு கோவையுண்டு.

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{GM}{ac^2} \qquad \text{...(2)}$$

$d\lambda$—நிறமாலைக் கோட்டின் பெயர்ச்சி

λ—நிறமாலைக் கோட்டின் அலை நீளம்

G—ஈர்ப்பு மாறிலி

M—பொருண்மை

a—ஆரம்

c—ஒளியின் திசை வேகம்

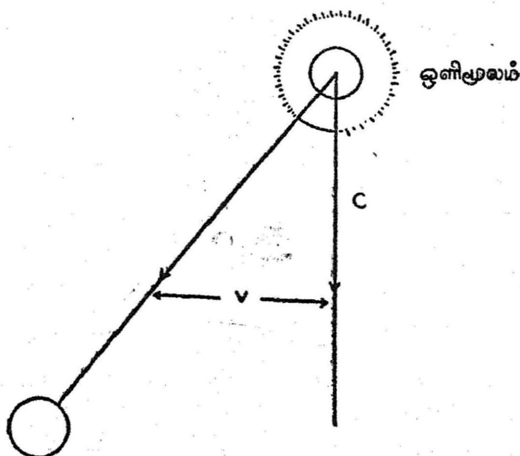
இக்கோவையைப் பயன்படுத்தி 5000A° அலை நீளம் கொண்ட ஒரு நிறமாலைக் கோட்டிற்கு 0·01°A பெயர்ச்சி ஏற்படலாம் என்று கணக்கிட்டறிந்துள்ளார்கள். இத்தகைய மிக நுண்ணிய பெயர்ச்சியினைப் பரிசோதனை மூலம் கண்டறிவது அவ்வளவு எளிதன்று. ஏனெனில் சூரிய நிறமாலைக் கோடுகளில் ஏற்படும் இந்த அளவு சிறிய பெயர்ச்சியையும் டாப்ளர் விளைவின் பயனாகப் (Doppler effect) பெரும் பெயர்ச்சி மறைத்துவிடுவதாக அமைந்துள்ளது. அதாவது, டாப்ளர் விளைவு ஐன்ஸ்ட்டைன் பெயர்ச்சியை முழுவதுமாக மறைத்து விடுகிறது. எனவே, பெயர்ச்சியைக் காண இயலாது. 1925ஆம் ஆண்டில் மவுண்ட் வில்சன் சோதனைச் சாலையைச் (Mount Wilson Laboratory) சேர்ந்த சிரியஸ் (Sirius) துணைவனிலிருந்து வரும் ஒளியினைக் காட்சிப் பதிவு செய்தார். இத் துணைவன் அடர்த்தி மிகுந்ததும், பொருண்மை மிகுதியானதும், குறைந்த ஆரத்தையுடையதும் ஆகிய ஒரு விண்மீன் ஆகும். இதற்கு $\frac{M}{a}$ என்ற விகிதம் மிக அதிகமாகும். ஆரம் குறைந்து பொருண்மை அதிகமாக இருப்பதால்தான் இவ்விகிதம் அதிகமாக இருக்கிறது. இதற்கான சிவப்புப் பெயர்ச்சி' (red shift) சூரியனைவிட 30 மடங்கு அதிகமாகும். எனவே இதனை டாப்ளர் விளைவு அதிகமாக மறைக்காது என்ற நிலையுள்ளது. காட்சிப் பதிவு செய்யப்பட்ட ஒளிப் பெயர்ச்சிக்கு டாப்ளர் விளைவின் திருத்தக் கூறினைக் கண்டனர். அதன் பின்னர் உண்மையான ஒளிப் பெயர்ச்சியின் மதிப்பினை 0.32A° எனக் கணக்கிட்டுள்ளனர். இதனைச் சார்பியல் பெயர்ச்சியாகப் பயன்படுத்தி விண்மீனின் ஆரத்தை 18,000 கிலோ மீட்டர்கள் எனக் கணக்கிட்டறிந்தார்கள். விண்மீனின் அளவினை (size) நேரடியாகக் கண்டறியும் பரிசோதனைகள் பல இம்மதிப்பினைச் சரியானதென நிரூபணம் செய்துள்ளன.

எனவே, ஈர்ப்புக் கொள்கை பற்றிய பொதுச் சார்பியல் கோட்பாடு பற்றி ஒரு தீர்க்கமான முடிவுக்கு வரலாம். இக் கொள்கையின் யோசனைகள் பல தோற்றத்திற்குப் புரிந்து

கொள்ள இயலாததாக இருந்தாலும், சோதனைகள் மூலம் உண்மையென நிரூபிக்கப்பட்டுவிட்டது என்று உறுதியாகக் கூறலாம்.

3-4. ஒளியின் பிறழ்ச்சி (Aberration of Light)

புவியின் மீதுள்ள ஒரு நோக்குநருக்கு ஏற்ப ஒளிக்கு இரு கூறுகள் உள்ளன. ஒன்று ஒளியின் திசை வேகக் கிடைக்கூறு (v); மற்றொன்று ஒளியின் திசை வேகச் செங்குத்துக் கூறு (c) எனவே ஒளி மூலத்திலிருந்து வரும் ஒளிக் கதிர் α என்ற கோணத்தில் சாய்ந்து காணப்படும்.



படம் 15. ஒளியின் பிறழ்ச்சியை விளக்குவது

இங்கு α என்ற கோணத்தின் மதிப்பு

$$\tan \alpha = \frac{v}{c} \qquad \ldots(1)$$

ஆகும். தலைக்கு நேர் மேல் உள்ள ஒரு விண்மீனிற்கு பெரும் (maximum) ஒளிப் பிறழ்ச்சி (aberration) ஏற்படும். இந்நிலையில் புவியின் திசை வேகம் காட்சிப் பதிவுக் கோட்டிற்கு (line of observation) நேர்குத்துக் கோட்டில் (perpendicular) அமையும் இந்நிலையில் ஒளியின் பிறழ்ச்சி

$$\tan \alpha = \frac{v_c}{c}$$

இங்கு v_b என்பது புவியின் வேகம் $= 3.0 \times 10^6 \frac{\text{செமீ}}{\text{விநாடி}}$

$$\therefore \quad \tan \alpha = \frac{3.0 \times 10^6}{3 \times 10^{10}} = 1.0 \times 10^{-4} \text{ ரேடியன்ஸ்}$$

$\therefore$ $\tan \alpha = \alpha$ (αவின் மதிப்பு மிகவும் குறைவாக இருந்தால் $\tan \alpha = \alpha$)

α வின் மதிப்பு: $\alpha = 20{\cdot}5''$ என்று கணக்கிட்டனர். ஆகையால், மீஒளி (stellar) வட்டப் பாதையின் (ஒரு வருட அளவிலே) விட்டம் $= 41.0''$ ஆகும். பிராடிலி (Bradley) இம் முடிவினைச் சார்பியலைச் சாராமல் தந்தார். சார்பியல் கொள்கையின் வழியாக இப் பிரச்சனையை நோக்குவோம்.

S சட்டத்தில் ஒரு விண்மீன் நிலையாக இருப்பதாகக் கொள்வோம். இவ் விண்மீனிலிருந்து ஓர் ஒளிச் சைகை (ligh-signal) z அச்சு வழியாகப் பரவுவதாகக் கொள்வோம். எனவே $x = 0$ மற்றும் $v = 0$ S′ என்ற சட்டத்தில் புவியானது நிலையாக இருப்பதாகக் கொள்வோம். இச் சட்டம் vc என்ற திசை வேகத்தில் x–அச்சுத் திசையில் இயங்குவதாகக் கொள்வோம்.

லோரண்ட்ஸ் மாற்றுச் சமன்பாடுகளைக் கையாண்டல்

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{v_c t}{\sqrt{\left(1 - \frac{v_c^2}{c^2}\right)}} \\ z' &= z = ct \\ \text{மற்றும் } t' &= t \Big/ \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \end{aligned}\right\} \quad \dots(2)$$

ஒளிப் பிறழ்ச்சிக் கோணம்

$$\tan \alpha \frac{(-x')}{(z')} + \frac{\frac{v_c t}{\sqrt{\left(1 - \frac{v_c^2}{c^2}\right)}}}{ct}$$

$$\tan \alpha = \frac{v_e}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} \quad \dots(3)$$

சமன்பாடு 1 சார்பியலைத் தழுவாத முடிவு. சமன்பாடு 3 சார்பியலைத் தழுவிய முடிவு. இவை இரண்டும் ஒன்றையே அதாவது ஒரே முடிவையே தருவதாக அமைந்துள்ளன. இதற்குக் காரணமாக அமைவது புவியின் குறைந்த திசை வேகமாகும். இதனால்தான் $\frac{v}{c}$ என்பதின் விகிதம் 10^{-4} ஆக புவிக்கு அமைந்துள்ளது. அதாவது $\frac{\text{புவியின் வேகம்}}{\text{ஒளியின் வேகம்}} = 10^{-4}$

ஆகவுள்ளது. இதனால்தான் சமன்பாடுகள் 1, 3 ஆகியவை ஒரே முடிவை ஓரளவு தருவதாக அமைந்துள்ளன.

3-5. சார்பியல் அடிப்படை இல்லாத டாப்ளர் விளைவு (Non relativistic Doppler Effect)

ஒளியினில் விளைகின்ற இத்தகையதொரு விளைவு ஒன்றினை நீண்ட காலத்திற்கு முன்பே டாப்ளர் என்பார் கண்டு பிடித்துள்ளார். இவ்விளைவின்படி பொதுவாக ஒலி மூலம், ஒலியைக் கேட்டுநர் அல்லது ஒளி பரவும் ஊடகம் ஆகியவற்றிற்கு இடையே உள்ள சார்பு இயக்கத்தின் காரணமாக ஒலியின் சுருதி மாறுபட்டுத் தோன்றும். ஒலி மூலம் வெளிவிடும் ஒலியின் சுருதி கேட்குநருக்கு மாறுபட்டுத் தோன்றும். எனவே ஒலியில் சுருதி மாற்றம் அல்லது அதிர்வெண் மாற்றம் ஏற்படுவதாகத் தோன்றும் விளைவுக்கு 'டாப்ளர் விளைவு' எனப் பெயர். இத்தகையதொரு விளைவினை ஒளியிலும் கண்டுள்ளனர். எடுத்துக்காட்டாக, ஒளிமூலம் வெளிவிடும் ஒளியின் நிற மாலையை, நிறமாலைக் காட்டியைக் (spectroscope) கொண்டு காணும்போது இதனை உணர வாய்ப்புண்டு. ஒளி மூலத்தின் இயக்கத்திற்கேற்ப நிறமாலை வரிகள் தங்கள் நிலையில் பெயர்ச்சி கொண்டு தோன்றும். இவ்விளைவே டாப்ளர் விளைவு என அழைக்கப்படும். இது ஒலியில் ஏற்படும் விளைவைப் போன்றதேயாகும்.

மைக்கல்சன் - மார்லி ஆகியோரது சோதனையின்படி, ஒளி பரவ ஊடகம் தேவையில்லை. இதனால் இங்கு ஒளி பரவும் போது ஊடகத்தின் இயக்கம் ஒளியின் அதிர்வெண்ணில் மாற்றத்தை விளைவிக்காது என்பது புலனாகும். அல்லது ஈதர் என்ற ஊடகத்தைக் கற்பனையாக இருப்பதாகக் கொண்டாலும் அது சலனமற்று இருப்பதால் ஒளி பரவும்போது புதிய

விளைவுகளை ஏற்படுத்த வழியேதுமில்லை. S மற்றும் S′ என்ற மேற்கோள் சட்டங்கள் இடதுபுறமிருந்து வலதுபுறமாக முறையே u மற்றும் v என்ற திசை வேகத்தில் இயங்குவதாகக் கொள்வோம்.

S′யில் ஒரு நோக்குநர் இருப்பதாகக் கொள்வோம். S′ ஆனது v என்ற திசை வேகத்தில் ஊடகத்தைச் சார்ந்து இயங்கிக் கொண்டிருக்கிறது. ஒளி மூலமானது S என்ற சட்டத்தில் உள்ளது. S ஆனது v என்ற திசைவேகத்தில் ஊடகத்தைச் சார்ந்து இடமிருந்து வலமாக இயங்கிக் கொண்டிருக்கிறது. vயின் திசையிலேயே S இயங்கிக் கொண்டிருக்கிறது.

ஒளி மூலத்தினுல் பரப்பப்பட்ட ஒளி அலையின் அதிர்வு எண் $= n$ எனக் கொள்வோம். முதல் ஒளி அலை வெளிவிடப் பட்டு $\frac{1}{n}$ விஞடிகள் ஆனபின் இரண்டாம் ஒளி அலை வெளி விடப்படும் என்பது பொருள்படும். ஒளியின் திசைவேகம் cயாக இருப்பதனுல், இரண்டாம் அலை வெளிவரும் சமயத்தில் முதல் அலையானது $c \times \frac{1}{n}$ என்ற தூரத்தைக் கடந்து சென் றிருக்கும். ஆனுல் இதே காலத்தில் ஒளி மூலமும் கூட நோக்கு நரை நோக்கி இயங்கி $\frac{u}{n}$ என்ற தூரத்தைக் கடப்பதாகக் கொண்டால், முதல் இரண்டு அலைகள் கடந்த பாதைகளின் வித்தியாசம் $= \frac{c}{n} - \frac{u}{n}$ ஆகும்.

$$\lambda' = \frac{c}{n} - \frac{u}{n} = \frac{c-u}{n} \qquad \ldots(1)$$

எனக் கொள்வோம். எனவே முதல் அலையானது நோக்குநரை அடையும் காலத்தில் இரண்டாம் அலையானது முதல் அலைக்குப் பின்னுல் λ' என்ற தூரத்தில் இருக்கும் என்பது தெளிவாகும். ஆனுல் இங்கு நோக்குநரும் ஒளி மூலத்தை விட்டு விலகி இயங்குவதால், ஒளிக்கும் நோக்குநருக்கும் இடைப்பட்ட சார்பு திசைவேகம் $= (c-v)$ ஆகும் இதன் பயனுக, இரண்டாவது ஒளி அலையானது $\frac{\lambda'}{c-v}$ விஞடிகள் கழித்து நோக்குநரை வந்தடையும். எனவே, நோக்குநரால் காட்சிப் பதிவு செய்யப்பட்ட ஒளியின் அதிர் வெண்ணை n' கொண்டால்,

$$n' = \frac{c - v}{\lambda'} = \frac{c - v}{c - u} . n \qquad ...(2)$$

எனக் கொள்ளலாம்.

(i) நோக்குநர் நிலையாகவும் ஒளிமூலம் இயக்கத்திலுமிருந்தால்: நோக்குநர் நிலையாகவும், ஒளி மூலம் நோக்குநரை நோக்கி இயங்கிச் செல்வதாகவும் கொள்வோம். சமன்பாடு (2)ல் நோக்குநர் நிலையாக இருப்பதால் $v = 0$ ஆகும்.

எனவே,

$$n' = \frac{c}{c - u} . n \qquad ...(3)$$

எனவே, ஒளிமூலம் நிலையான நோக்குநரை நோக்கி இயங்கும் போது, ஒளியின் அதிர்வெண் நோக்குநருக்கு ஒளி மூலத்தி லிருந்து பெறப்படும் ஒளியின் அதிர் வெண்ணைவிட அதிகமாகக் காணப்படும்.

ஒளி மூலமானது நிலையான நோக்குநரை விட்டு விலகிச் சென்றால் $v = 0$ மற்றும் $u = -u$ ஆகும். எனவே,

$$n' = \frac{c}{c + u} . n \qquad ...(4)$$

எனவே, நிலையாக உள்ள நோக்குநரை விட்டு ஒளி மூலம் விலகிச் செல்லும்போது ஒளியின் அதிர்வெண் அதிகரிக்கிறது.

(ii) ஒளி மூலம் நிலையாகவும், நோக்குநர் இயக்கத்திலுமிருந் தால்: ஒளி மூலமானது நிலையாகவும், நோக்குநர் இயங்கிக் கொண்டுமிருப்பதாகக் கொண்டால் சமன்பாடு 2ல் $u = 0$ ஆகும்,

$$\therefore \quad n' = \frac{c - v}{c} . n \qquad ...(5)$$

ஒளி மூலமானது நிலையாகவும் நோக்குநர் ஒளி மூலத்தை விட்டு விலகி இயங்குவதாகவும் கொண்டால் ஒளியின் அதிர்வெண் குறைந்து காணப்படும்.

ஒளி மூலம் நிலையாகவும், நோக்குநர் ஒளி மூலத்தை நோக்கி இயங்குவதாகவும் கொண்டால், $v = u$, மற்றும் $u = 0$ எனக் கொள்ளலாம். சமன்பாடு 2ல் இவற்றைப் பொருத்தினால்

$$n' = \frac{c+v}{c} \cdot n \qquad ...(6)$$

எனவே, நிலையாகவுள்ள மூலத்தை நோக்குநர் இயங்கினால் ஒளியின் அதிர்வெண் அதிகரித்துக் காணப்படும்.

டாப்ளர் விளைவு என்ற இந்தத் தோற்றப்பாடு ஒளியியலில் மிக முக்கியத்துவம் வாய்ந்தது ஆகும். இவ் விளைவிற்கான பரிசோதனைச் சான்றுகள் பலவுள்ளன. அத்தகைய ஒரு சான்றினை ஈண்டு காண்போம். விண்மீன்களிடமிருந்து (stars) ஒளி நம்மை வந்தடைகின்றது. இவ்வொளியினை நிறமாலையியல் துணைகொண்டு ஆராய்ந்தால் நிறமாலையில் நன்கு வரையறுக்கப் பட்ட பல வரிகளைக் காணலாம். இந் நிறமாலையை பொறி நிற மாலையோடு (spark) இணைத்து, புகைப்படத் தாளில் பதிவாக் கலாம். இப் பொறி நிறமாலையில் பல மீனொளி (stellar) வெளி விடும் வரிகளுக்கு ஒப்பான வரிகளும் இருக்க வேண்டும். மேலும் மீனொளி வரி கோடுகளில் சில குறைந்த அலை நீளம் கொண்ட நீல நிறப் பகுதியின் பக்கம் பெயர்ச்சி பெற்றும் இன்னும் சில வரிகள் அதிக அலை நீளம் கொண்ட சிவப்பு நிறப் பகுதியின் பக்கப் பெயர்ச்சி பெற்றும் காணப்படுகின்றன. இதனை டாப்ளர் விளைவினை அடிப்படையாகக் கொண்டு எளிதில் விளக்கினார்கள் முதல் வகையில், புவியை நோக்கி ஒளி மூலமாகிய விண்மீன் வந்து கொண்டிருப்பதாலும், இரண்டாம் வகையில் விண்மீன் புவியை விட்டு விலகி இயங்கிக் கொண்டிருப்பதாலும் பெயர்ச்சி ஏற்படுகின்றன. இப் பெயர்ச்சியானது புவிக்கும் விண்மீனிற்கும் இடைப்பட்ட தூரத்திற்கு ஏற்ப அமையும்.

சமன்பாடு 2ல் இருந்து விண்மீன் அல்லது ஒளி மூலம் புவியை நோக்கி இயங்கும்போது திசைவேகம் u ஆனால்,

$$n' = \frac{c}{c-u} \cdot n$$

அல்லது $\lambda' = \frac{c}{c-u} \cdot \frac{1}{\lambda}$

$$\lambda' = \frac{c-u}{c} \cdot \lambda \quad \text{(நம்மை நோக்கி வரும்போது)} \qquad ...(7)$$

விண்மீனின் இயக்கத்தால், அலை நீளத்தில் பெயர்ச்சி காணப் படுகிறது. அதாவது பெயர்ச்சி, நிறமாலையில் நீல வண்ணத்தை நோக்கி நிகழ்கிறது. எனவே, விண்மீன் நம்மை நோக்கி இயங்கும் போது அலைநீளம் குறைவதாகக் காணப்படுகின்றது.

இதே போன்று, விண்மீன் புவியை விட்டு பின்னே செல்வதாக இருந்தால் ஒளியின் தோற்ற அலை நீளம்

$$\lambda' = \frac{c+u}{c} \cdot \lambda \text{ (பின்னோக்கி இயங்கும்போது)} \quad \ldots(8)$$

இதனால் ஒளியின் அலை நீளம் அதிகரித்துத் தோன்றும்; இப்போது நிறமாலையில் பெயர்ச்சி சிவப்பு வண்ணத்தை நோக்கி நிகழும். இத்தகைய சான்றுகள் பல வானியலில் டாப்பளர் விளைவுக்கு நிரூபணமாக அமைந்துள்ளன.

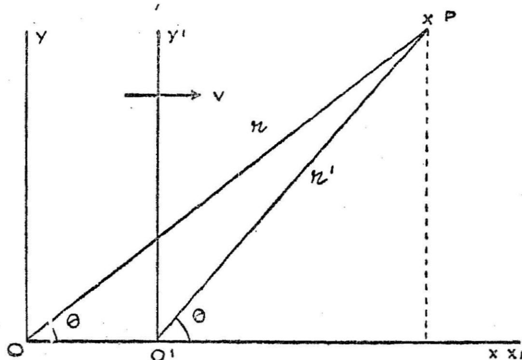
3-6. சார்பியல் டாப்பளர் விளைவு (Relativistic Doppler Effect)

டாப்பளர் விளைவின் பயனாக ஒலி மற்றும் ஒளியின் அதிர்வெண் மாறுபாடு ஏற்படும் ஒளி அல்லது ஒலி மூலத்தின் இயக்கத்தின் காரணமாகவோ அல்லது நோக்குநரின் இயக்கத்தின் காரணமாகவோ அல்லது மூலம் மற்றும் நோக்குநர் ஆகிய இவ்விரண்டின் இயக்கத்தின் காரணமாகவும் டாப்பளர் விளைவு என்ற தோற்றப்பாடு விளைகின்றது

தற்பொழுது ஒளியை உமிழும் ஒளி மூலம் 0 என்ற தோற்றுவாயில் உள்ள நோக்குநரை விட்டு v என்ற சீர் திசை வேகத்தில் இயங்கி, அவரைவிட்டு விலகிச் செல்வதாக கொள்வோம். இதனை அடிப்படையாகக் கொண்டு ஒளியின் மெய்யான அதிர்வெண், தோற்ற அதிர்வெண் (apparent frequency) ஆகியவற்றிற்கு இடையேயுள்ள தொடர்பினை விளக்கும் சமன்பாடுகளைப் படைக்கலாம்.

P என்ற ஒளி மூலம் S′ என்ற இயங்கு சட்டத்தில் நிலையாக இருப்பதாகக் கொள்வோம். ஆனால் P என்ற ஒளி மூலம் O என்ற புள்ளியில் உள்ள நோக்குநரை விட்டு v என்ற சீர் திசை வேகத்தில் இயங்கி அவரைவிட்டு விலகிச் சென்று கொண்

டிருக்கிறது. O′ என்ற புள்ளியில் உள்ள நோக்குநர் (S′ என்ற சட்டத்தின் தோற்றுவாய் மூலத்தால் வெளியிடப்படும் ஒளியினைக் கொண்டு) ஒற்றை நிற சமதள அலையினை வரைவதாகக்கொள்வோம்.



படம் 16.

ஒற்றை நிற சமதள அலையினைக் கீழ்க் கண்ட கோவையால் வெளிப்படுத்தலாம்.

$$\xi' = A' e^{2\pi i\nu'\left[t' + \frac{r}{c}\right]} \qquad ...(1)$$

ν' என்பது ஒளியின் அதிர்வெண்.

இதே போன்று O என்ற புள்ளியில் அமைக்கப்பெறும் அலையினைக் கீழ்க் கண்ட கோவையால் வெளிப்படுத்தலாம்.

$$\xi = A e^{2\pi i\nu\left[t + \frac{r}{c}\right]} \qquad ...(2)$$

P என்ற புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் (co-ordinates) முறையே S என்ற மேற்கோள் சட்டத்தில் (x, y) எனவும், S′ என்ற மேற்கோள் சட்டத்தில் (x', y') எனவும் கொள்வோம் S′ என்ற சட்டம் X-திசையில் S-ஐச் சார்ந்து இயங்குவதாகக் கொள்வோம். P-யின் இயக்கமானது x மற்றும் X′ திசையில் O-வைச் சார்ந்து ஏற்படுவதாகக் கொள்வோம். எனவே.

$$\left.\begin{aligned} r' &= x' \cos\theta' + y' y\sin\theta' \\ r &= x\cos\theta + y\sin\theta \end{aligned}\right\} \qquad ...(3)$$

ஆதலின்,

$$\xi' = A' e^{2\pi i\nu'\left[t' + \frac{x'\cos\theta' + y'\sin\theta'}{c}\right]}$$

$$\xi = A e^{2\pi i v \left[t + \frac{x \cos\theta + y \sin\theta}{c} \right]} \qquad \ldots(4)$$

அடுக்குக் குறியில் உள்ளவை (exponent) லோரண்ட்ஸ் உரு மாற்றங்களுக்கு (Lorentz Transformations) மாற்றமில்லாதவை யாகும் (Invariant).

$$v \left[t + \frac{x \cos\theta + y \sin\theta}{c} \right]$$

$$= v' \left[t' + \frac{x' \cos\theta' + y' \sin\theta'}{c} \right]$$

எனவே,

t', x' மற்றும் y' ஆகியவற்றிற்கான மதிப்புகளை லோரண்ட்ஸ் உருமாற்றச் சமன்பாடுகளிலிருந்து பயன்படுத்துவோம்.

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' &= y + z' = z \\ t' &= \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \right\}$$

எனவே,

$$v \left[t + \frac{x \cos + y \sin\theta}{c} \right]$$

$$= v' \left[\frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{(x - vt)\cos\theta'}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\sin\theta'}{c} \right] \qquad \ldots(5)$$

சமன்பாடு எண் (5) t, x மற்றும் y ஆகியவற்றின் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் பொருந்துவதாக அமைந்துள்ளது. இச் சமன்பாட்டின் இருபுறங்களிலுமுள்ள t, x மற்றும் y ஆகியவற்றின் கெழுக்களைச் (coefficients) சமன்படுத்துவோமேயானால் (equating),

$$v = \frac{v'\left[1 - \frac{v}{c}\cos\theta'\right]}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \ldots(6)$$

மற்றும்,

$$\frac{v}{c}\cos\theta = \frac{v'}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} \times \left[\frac{\cos\theta'}{c} - \frac{v}{c^2}\right]$$

அல்லது,

$$\cos\theta = \frac{v'}{v}\,\frac{\left[\cos\theta' - \frac{v}{c}\right]}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

சமன்பாடு (6)-லிருந்து $\frac{v'}{v}$ -ன் மதிப்பைப் பிரதியிட

$$\cos\theta = \frac{\cos\theta' - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta'} \qquad \ldots(7)$$

எனக் கிடைக்கிறது.

இதைப் போன்றே

$$\sin\theta = \frac{\sin\theta'\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}{\left[1 - \frac{v}{c}\cos\theta'\right]} \qquad \ldots(8)$$

சமன்பாடு எண் (6) ஒளியின் தோற்ற அதிர்வெண்ணைக் கொடுப்பதாக அமைந்துள்ளது. சமன்பாடுகள் (7)-ம் (8)-ம் ஒளி மூலத்தின் திசையைக் கொடுக்கின்றன. இங்கு ஒளி மூலமானது O என்ற புள்ளியைச் சார்ந்து சீராக விலகி இயங்கிக் கொண்டிருக்கிறது. மேற்கூறிய சமன்பாடுகள் பரிசோதனை மூலம் நிரூபிக்கப்பட்டுள்ளன. மேற்கூறிய விளைவின் இரண்டு வகைகள் பற்றி விவாதிப்போம்.

(i) ஆரைக்கால் டாப்ளர் விளைவு (Radial Doppler Effect)

இவ் வகையில் ஒளி மூலம் P யானது x திசையில் O என்ற புள்ளியில் உள்ள நோக்குநரை விட்டு விலகி இயங்குகிறது. எனவே, $\theta = \theta' = 0$.

ஆதலின் சமன்பாடு (6) இம் மதிப்பைப் பயன்படுத்தியபின் எளிய சமன்பாடாக மாற்றமடைகிறது.

$$\nu = \frac{\nu'\left[1 - \frac{v}{c}\right]}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} = \nu' \sqrt{\left(\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}\right)} \qquad \ldots(9)$$

இச் சமன்பாடு எண் (9) சார்பியல் அடிப்படையில் ஆரக் கால் டாப்ளர் விளைவு (நீளவாகு) பற்றி விளக்குவதாக அமைந் துள்ளது. இவை வெற்றிடத்தில் ஒளி பரவும்போது நிகழ் வதாகும். இதற்கு ஒப்பான முதுபழங் கொள்கையில் உள்ள கோவை கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

$$\nu = \frac{\nu'}{\left(1 + \frac{v}{c}\right)} \qquad \ldots(10)$$

சமன்பாடுகள் (9) மற்றும் (10)-ல் $\frac{v}{c}$-யின் முதல் வரிசையை $\left(\text{first order in } \frac{v}{c}\right)$ அடிப்படையாகக் கொண்டால், அவற்றைச் சமமாகக் கருத இடமுண்டு. சமன்பாடு (9) ஆனது நிறமாலையின் இறுதியில், (குறிப்பாகக் குறைவான அதிர்வெண் உடைய சிவப்புப் பகுதியில்) ஏற்படும் ஒளிப்பெயர்ச்சியின் அளவைத் தருகின்றதாக அமையும்.

இப்போது ஒளி மூலமானது O என்ற புள்ளியில் உள்ள நோக்குநரை நோக்கிச் செல்வதாகக் கொண்டால்,

$$\theta = \theta' = 180^\circ$$

எனவே,

$$\nu = \frac{\nu' \left[1 + \frac{v}{c}\right]}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

$$= \nu' \sqrt{\left\{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}\right\}} \qquad \text{...(11)}$$

இச் சமன்பாடு எண் (11) ஆனது நிறமாலையின் தொடக்கத்தில் குறிப்பாக அதிக அதிர்வெண் பகுதியில் (நீலம்) ஏற்படும் ஒளிப் பெயர்ச்சியின் அளவைத் தருகின்றது.

இதற்கு ஒப்பான முது பழங் கொள்கையில் உள்ள கோவை கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

$$\nu = \frac{\nu'}{1 - \frac{v}{c}} \qquad \text{...(12)}$$

இச் சமன்பாடும், $\frac{v}{e}$ யின் முதல் வரிசையை அடிப்படையாகக் கொண்டால் மேற்சொன்ன இரு சமன்பாடுகளும் சமமெனக் கருத வாய்ப்புண்டு.

ஆரைக்கால் டாப்ளர் விளைவில் ஒளி அலைகள் பரவும் திசையில் காட்சிப் பதிவுகள் செய்யப்படுகின்றன. ஒளியின் போக்கில் அல்லது அதன் திசையில் காட்சிப் பதிவு செய்வதால் இதனை ஒளியின் நெட்டலைவு இயக்கமாகக்கொண்டு டாப்ளர் விளைவை நெட்டலைவு டாப்ளர் விளைவு (Longitudinal Doppler effect) எனவும் கூறலாம்.

இவ்வாறின்றி ஒளிமூலத்தின் திசைக்கு 90° பாதையில் காட்சிப் பதிவு செய்தால், இத்திசையில் விளையும் விளைவை, குறுக்கு டாப்ளர் விளைவு (Transverse Doppler effect) என்பர்.

டாப்ளர் விளைவின் உறுதிப்பாடு (Confirmation of Doppler Effect)

நெட்டலை டாப்ளர் விளைவு பற்றி **H. E.** ஐவ்ஸ் (H. E. Ives) மற்றும் G. R. ஸ்டில்வெல் (G. R. Stilwell) என்பாரும் இணைந்து நிறமாலையியலின் துணை கொண்டு ஆராய்ந்தனர். நெட்டலைவு டாப்ளர் விளைவினையும் உறுதிசெய்தனர். அவர்கள் ஹைட்ரஜன் அணுக்கதிர்களைக் கிளர்ச்சியூட்டப்பட்ட எலெக்ட்ரான் நிலைகளில் நிறுத்திச் (excited electronic states) சோதனை நடத்தினர். இதற்குச் செறிவு மிகு மின்புலனைப் பயன்படுத்தினர். இந்த அணுக்கள் முடுக்கம் பெற்ற ஹைட்ரஜன் மூலக் கூறு ஐயனிகளாக H_2^+ மற்றும் H_3^+ என்ற நிலையில் மிகுந்த செறிவு கொண்ட மின் புலனில் அவைகளைச் செயல்புரியச் செய்தனர். **27270** வோல்டுகள் மின்னழுத்த வேறுபாடாகக் கொண்டு அணுக்களை முடுக்கினர்.

அவற்றால் வெளியிடப்படும் சராசரி அலை நீளமுள்ள நிறமாலைக் கோட்டில் ஏற்படும் ஒளிப்பெயர்ச்சியினைக் காட்சிப் பதிவு செய்தனர். அணுக்கள் இயங்கும் திசைக்கு நேர் எதிராகவும் அதே திசையிலும் பெயர்ச்சியினைப் பல சராசரிகளைக் கொண்டு நிர்ணயித்தனர்.

சமன்பாடு (9)–ல் கண்டபடி

$$\nu = \nu' \sqrt{\left(\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}\right)}$$

$$\because \quad \nu = \frac{c}{\lambda} \quad \text{மற்றும்} \quad \nu' = \frac{c}{\lambda'}$$

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda'} \sqrt{\left(\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}\right)}$$

அல்லது $$\frac{\lambda}{\lambda'} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1+\beta}} \qquad \ldots(13)$$

$$\because \quad \beta = \frac{v}{c}$$

β வின் மதிப்பை முன்பக்கத் திசையில் இயங்கும்போது (+) எனவும், பின் திசையில் இயங்கும்போது (—) எனவும்

கொண்டால், முறையே அதற்கேற்ற காட்சிப் பதிவு செய்யப்பட்ட முன் திசை அலை நீளம் λ_1 எனவும் பின் திசை அலை நீளம் λ_2 எனவும் கொள்ளலாம். நிலையாக இருக்கும் அணுவினுல் வெளியிடப்படும் ஒளி அலையின் நீளம் λ_0 எனக் கொள்வோம். சமன்பாடு (13)-ல் இருந்து

$$\lambda_1 = \lambda_0 \sqrt{\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)}$$

இதே போன்று,

$$\lambda_2 = \lambda_0 \sqrt{\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)}$$

எனவும் கொள்ளலாம்.

எனவே, காட்சிப் பதிவு செய்யப்பட்ட அலைகளின் சராசரி அலை நீளம்

$$\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{\lambda_0}{2}\left[\sqrt{\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)} + \sqrt{\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)}\right]$$

$$= \frac{\lambda_0}{\sqrt{(1-\beta^2)}} \qquad \ldots(14)$$

மேற்சொன்ன விஞ்ஞானிகளால் பரிசோதனை மூலம் காட்சிப் பதிவு செய்யப்பட்ட ஒளிப் பெயர்ச்சி $= 0{\cdot}074 \times 10^{-8}$ செ.மீ. சமன்பாடு (14)ஐப் பயன்படுத்திக் கணக்கிடப்பட்ட ஒளிப்பெயர்ச்சி $= 0.072\times10^{-8}$ செ.மீ. இங்கு $\beta = \dfrac{v}{c}$ யின் மதிப்பு $= 000.5$ ஆகக் கொள்ளப்பட்டது. எனவே, காட்சிப் பதிவு செய்யப்பட்ட மதிப்பும் கணக்கிடப்பட்ட மதிப்பும் தோராயமாகச் சமமாகக் காணப்படுகின்றன. ஆதலின் நெட்டிலை

டாப்ளர் விளைவிற்குப் பரிசோதனை மூலம் தக்க நிரூபணம் கிடைத்துள்ளது எனக் கூறலாம்.

குறுக்கு டாப்ளர் விளைவு (Transverse Doppler Effect)

சமன்பாடு (6)-ல் கண்டபடி

$$\nu = \frac{\nu'\left[1 - \frac{v}{c}\cos\theta'\right]}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

இப்போது $\theta = 90^\circ$ எனக் கொண்டால்,

$$\cos\theta' = \frac{v}{c}$$

அல்லது,

$$\nu = \frac{\nu'\left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right]}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} = \nu'\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

$$\therefore \nu = \frac{\nu'\left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right]}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} \qquad \ldots(15)$$

ஆதலால், நோக்குநர் ஒளி மூலத்தின் இயக்கு திசைக்குச் செங்குத்துத் திசையிலிருந்து ஒளியை ,நோக்கினால், அவருக்கு ஒளியின் அதிர்வு எண்ணில் மாற்றமேற்படுவதாக இருக்கிறது. இத்தகைய மாற்றமே குறுக்கு டாப்ளர் விளைவு (Transverse Doppler effect) எனப்படும். ஆனால் சார்பியல் இன்றித் தோராயமாகப் பார்த்தால் இத்தகைய விளைவை முது பழம் எந்திரவியல் கூறுவதாக இல்லை. இத்தகைய நவீன விளைவை அண்மைக் காலத்தில்தான் காட்சிப் பதிவு செய்தனர். ஐவ்ஸும், ஸ்டில்வெல் அவர்களும் மற்றும் ஒட்டிங் (Otting) என்பாரும் தனித்தனியாக இவ் விளைவினைக் காட்சிப்பதிவுசெய்துள்ளனர்,

பயிற்சி

(1) சமத்துவக் கொள்கை அல்லது சமநிலைக் கொள்கை என்ற இக் கொள்கையைத் தெளிவுபடுத்துக.

(2) மின் கோவ்ஸ்கியின் நாப்பரிமாண வெளி–காலத் தொடர்பம் என்றால் என்ன? $dx^2+dy^2+dz^2+c^2dt^2=0$ என்ற இச் சமன்பாடு விளக்குவது யாது?

(3) ஐன்ஸ்ட்டைனின் ஈர்ப்புக் கொள்கையை விவரிக்கவும். இக் கொள்கைக்கான மூன்று பரிசோதனை நிரூபணங்களைக் கொடுத்திடுக.

(4) சார்பியல் அடிப்படையில் டாப்ளர் விளைவினை விளக்கவும்.

பாகம் 2

குவாண்டம் விசையியல்

4. குவாண்டம் விசையியல்: தேவை-தோற்றம்

4-1. தோற்றுவாய்

இன்றைய நிலையில் அறிவியல் துறையில் எல்லையற்ற முன்னேற்றம் ஏற்பட்டுள்ளது. குறிப்பாக நவீன இயற்பியல் துறை வெகுவாக முன்னேறியுள்ளது. இதற்கு ஆணிவேராக அமைவது குவான்டம் எந்திரவியல் என்றால் மிகையாகாது. நாம் தொன்றுதொட்டுக் கையாண்டுவந்த முதுபழம் விசையியல் பேரளவு உலகில் (Macroscopic World) பல பிரச்சினைகளுக்கு நொடியில் எளிதாகவும், விளக்கம் தர வல்லதாகவும் அமைந்துள்ளது. ஆனால், அணு மற்றும் மூலக் கூறுகள் நிறைந்த நுண்ணியலான உலகில் (Microscopic World) பல பிரச்சினைகளுக்கு விளக்கம் தர இயலாத நிலையில் இருந்தது. ஆகவே, நவீன குவான்டம் விசையியல் தோன்ற வேண்டிய ஒரு சூழல் ஏற்பட்டது. இப்புதிய விசையியலைப் பயன்படுத்தி இயற்பியல் துறையில், குறிப்பாக நுண்ணியல் உலகில் தோன்றும் எல்லாப் பிரச்சினைகளுக்கும் தீர்வு காண இயலும் என்ற நிலை உருவாகியுள்ளது. நுண்ணிய உலகின் விந்தையை நமக்குத் தெளிவாகக் காட்டும் கண்ணாடிபோல் இந் நவீன விசையியல் விளங்குகிறது என்று சொல்வது மிகையாகாது. பரிசோதனை மூலம் உறுதிப்படுத்தப்பட்ட, முதுபழம் விசையியலின்மூலம் விரித்துக் கூற முடியாத சில விதிகளைப்பற்றிச் சற்று விளக்கமாக ஆராய்வோம்.

(a) **கரும் பொருள் கதிர் வீச்சு** (Black Body Radiation): மின்காந்தக் கொள்கையில் ஒரு பொருள் ஆற்றலை வெளிவிடும்போது தொடர்ந்து விட்டுக்கொண்டே இருக்கின்றது என்பது தெளிவாகக் கூறப்பட்டுள்ளது. அப்படி வெளிவிடும் போது பொருளின் வெப்ப நிலையும் குறைந்துகொண்டே போகும். ஏனென்றால், ஒரு பொருளின் ஆற்றல் அதன் வெப்ப நிலையைப் பொருத்தே அமைவது இயல்பாகும். ஆகவே, வெப்பத்தைத் தரக்கூடிய பொருளின் மூலம் ஒரு குறிப்பிட்ட வெப்ப நிலையில்

கதிர் வீச்சை மாறாமல் அதே நிலையில் நிலைத்திருக்கச் செய்ய முடியும். இந்நிலையில் அப் பொருள் எந்த அளவு கதிர் வீச்சை வெளிவிடுகிறதோ அந்த அளவு பெற்றுக்கொள்ளுகிறது. மேலும், ஒரு பொருள் எதிரொளிப்புத் திறனைப் பெற்றிருக்கவில்லை என்றால் அது அதன்மேல் படுகின்ற எல்லாக் கதிர் வீச்சையும் உட்கவர்ந்துகொள்கிறது. இந்தக் கதிர்வீச்சைத்தான் 'கரும் பொருள் கதிர் வீச்சு' எனக் கூறுகின்றோம்.

1859ஆம் ஆண்டு கிர்க்காஃப் (Kirchoff) என்னும் விஞ்ஞானி கரும் பொருள் கதிர் வீச்சின் தன்மையைப்பற்றிய தீவிர ஆராய்ச்சியின் பயனாகச் சில உண்மைகளைக் கண்டு பிடித்தார். (1) கரும்பொருள் அதன்மேல் படுகின்ற எல்லாக் கதிர் வீச்சையும் உட்கவர்தல் அல்லாமல் அதை வெளிப்படுத்தும் பொழுது அது ஓர் இலட்சியக் (perfect) கதிர் வீசுவான் (Radiator) போல ஆகிறது. (2) கதிர்வீச்சு வெப்ப நிலையைப் பொறுத்துதான் இருக்குமே ஒழிய பொருளின் இயற்கையைப் பொருத்ததன்று. ஆனால் கரும்பொருள் கதிர் வீச்சில் எவ்வாறு ஆற்றல் நிறமாலையில் வெவ்வேறு அலை நீளத்தில் பங்கீடாகி இருக்கிறது என்பதைத் தெளிவாகத் தெரிந்துகொள்ள முடியவில்லை.

1884ஆம் ஆண்டு ஸ்டிஃபான், போல்ட்ஸ்மேன் (Stefan and Boltzmann) என்னும் விஞ்ஞானிகள், மின்காந்தக் கொள்கையில் உறுதிப்படுத்தப்பட்ட கதிர் வீச்சு அழுத்தத்தை (pressure) உண்டாக்கும் என்கிற கொள்கையின் மூலம் ஒரு வினாடியில் ஒரு சதுர அளவு பரப்பில் வெளிவிடும் ஆற்றல் கதிர் வீச்சு (energy of radiation) நிறமாலையில் வெவ்வேறு அலை நீளத்தில் சார்பிலா வெப்ப நிலையில் நான்காவது மடங்கை (4th power) சார்ந்துள்ளது என்பதைக் கண்டுபிடித் தார்கள். இதைத்தான் கரும்பொருள் கதிர்வீச்சில் ஸ்டிஃபான் நான்காவது திறன் விதி என்று கூறுவர். இந்த விதியினாலும், வெவ்வேறு அலை நீளத்தில் ஆற்றல் எவ்வாறு பரப்பப் பட்டுள்ளது என்பதற்கு விளக்கம் கூற முடியவில்லை.

1893ஆம் ஆண்டு வீண் (Wien) என்னும் விஞ்ஞானி வெப்ப நிறமாலையில் ஆற்றல் எவ்வாறு பிரிக்கப்பட்டுள்ளது என்பதைக் கண்டுபிடிக்கப் பரிசோதனை ஒன்று செய்தார். ஒரு பெட்டியில் (enclosure) கரும்பொருள் கதிர்வீச்சு நிறைந் திருக்கிறது. அவை வெப்பம் மாற்றீடற்ற முறையில் (adia-batically) விரிவுபடுத்தப்பட்ட பிறகு அப் பெட்டியில் வேறு வெப்ப நிலையில் கரும் பொருள் கதிர் வீச்சு நிறைந்திருக்கும்

கதிர் வீச்சு அழுத்தத்தின் மூலம் ஆற்றல் எவ்வாறு பிரிக்கப் பட்டுள்ளது என்பதைக் கண்டுபிடிக்கலாம். இதன் பயனாக இரண்டு விதிகளைக் கண்டுபிடித்தார். அவையாவன:

$$\lambda T = \text{மாறிலி} \qquad \ldots(1)$$

$$ET^{-5} = \text{மாறிலி} \qquad \ldots(2)$$

λ என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட வெப்ப நிலையின் (T) அலை நீளம், E என்பது ஆற்றல் வெளிவிடும் திறன். மேற்கண்ட இரு விதிகளைப் பயன்படுத்தியும் 'Maxwell's Law of Distribution' என்ற மேக்ஸ்வெலின் விதியை உபயோகப்படுத்தியும் ஒரு சமன் பாட்டை வீன் என்பவர் கண்டுபிடித்தார். அவ் விதியாவது:

$$dE = K\lambda^{-5} \quad e^{-a/\lambda T.} \quad d\lambda \qquad \ldots(3)$$

K யும் a-யும் மாறிலிகள்.

1900ஆம் ஆண்டு ரலேயும் ஜீன்ஸ்சும் (Rayleigh and Jeans) மற்றொரு சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடித்தார்கள். மின் காந்தக் கொள்கையில் ஒரு கரும் பொருள் கதிர் வீசுவான் தொடர்ந்து மாறக்கூடிய அலை நீளங்களை வெளிவிடுகின்றது. அத்தகைய கதிர் வீச்சுகளை ஒற்றை நிற அலைத் தொடர்களாக (monochromatic wave train) வைத்துக் கொள்ளலாம். அத்துணை அலைத் தொடர்கள் இரண்டு அலை நீளத்திற்கு இடையில் அதாவது λ மற்றும் $(\lambda + d\lambda)$ எனும் இரண்டின் இடையில் இருக்கின்றன என்பதைப் புள்ளியியல் விசையியல் மூலம் கண்டு பிடிக்கலாம். ஆற்றல் சமபங்கீடு தேற்றத்தை (theorem of equipartition of energy) உபயோகப்படுத்தி ஒவ்வொரு அலைத் தொடரும் எவ்வளவு ஆற்றலைப் பெற்றிருக்கின்றது என்பதைக் கண்டுபிடிப்பதன் மூலம் ஆற்றல் எவ்வாறு பங்கிடப்பட்டுள்ளது என்பதைக் கண்டுபிடிக்கலாம், அதாவது,

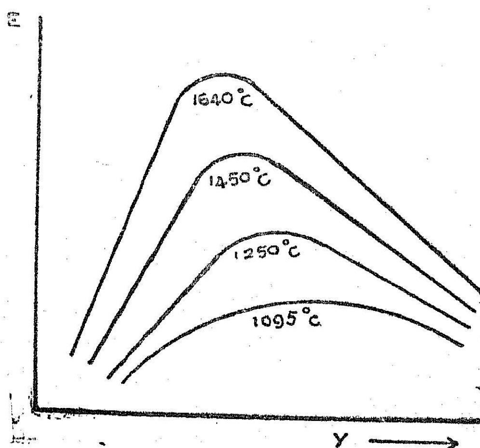
$$dE = B\lambda^{-4}\, Te^{-a/\lambda T.} \quad d\lambda \qquad \ldots(4)$$

B-ம் a-ம் மாறிலிகள்.

முது பழங் கொள்கையைப் பயன்படுத்திக் கண்டுபிடிக்கப் பட்ட எல்லா சமன்பாடுகளும் முரணான முடிவுகளையே கொடுத்தன. உதாரணமாக, வீனின் (Wien's) சூத்திரத்தில் வெப்ப நிலை, ஈறிலியாக (infinity) இருக்கும்பொழுது, ஆற்றல் வரம்புடையதாக (finite) இருக்கிறது. ஆனால், இது பரிசோதனை மூலம் உறுதிப்படுத்தப்பட்ட ஸ்டிஃபான் நான்காவது

திறன் விதிக்கு முரண்பாடாக இருக்கிறது. மேலும் ஒரு குறிப்பிட்ட அலைநீள நெருக்கத்தில் (wave length range) $d\lambda$, கதிர்வீச்சின் ஆற்றலானது அலை நீளம் குறையும்போது அதிகரிக்கின்றது. சமன்பாடு எண் (4)-ல் படிக்குறி பகுதி (exponential term) சிறிதாக இருக்கும்போது ரேலே-ஜீன்ஸ் சூத்திரம் அளிக்கும் கருத்துக்கும் முரண்பாடாக உள்ளது.

எல்லாச் சூத்திரங்களும் ஒன்றுக்கொன்று மாறுபட்ட முடிவைக் கொடுத்தன. ஆகவே, அலை நீளத்தில் ஆற்றல் எவ்வாறு பங்கிடப்பட்டுள்ளது என்பதை லம்மர் (Lummer), பேஷன் (Paschen) முதலிய விஞ்ஞானிகள் தீவிரமாக ஆராய்ச்சி செய்தார்கள். வெவ்வேறு அலை நீளத்திற்கும் அதற்கேற்ப கதிர்வீச்சின் ஆற்றலும் கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. இதற்கு ஒரு வரைபடம் (graph) வரையப்பட்டது (படம் 17).



படம் 17. கரும்பொருள் கதிர்வீச்சில் ஆற்றல் பரப்பப்பட்டுள்ள விதம்.

ஒரு குறிப்பிட்ட வெப்ப நிலையில் வரையப்பட்ட வளை கோட்டிற்கும் (curve) கிடைமட்ட (horizontal) அச்சுக்கும் (axis) இடையிலுள்ள பரப்பளவானது அந்த வெப்ப நிலையில் கதிர் வீச்சின் ஆற்றலைக் குறிக்கிறது. பரப்பளவானது சார்பில்லா வெப்ப நிலையின் நான்காவது மடங்குக்கு ஏற்றவாறு அதிகரிக் கிறது. இதன் மூலம் ஸ்டிஃபான் கொள்கையை நிரூபிக்க முடிகிறது. பரும ஆற்றலின் (maximum energy) அலை நீளம் படத்தின் உச்சத்தைக் (peak) குறிக்கிறது. வெப்பநிலை

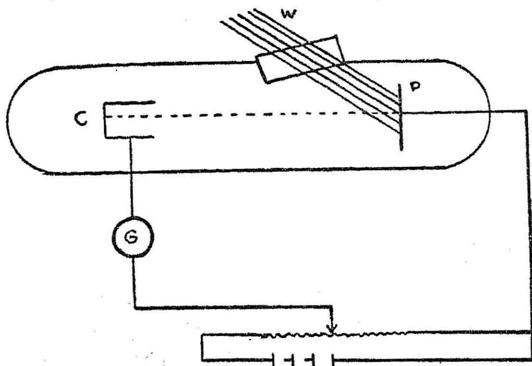
அதிகரிக்கும்போது வளைகோட்டின் உச்சத்திற்கு குறைந்த அலை நீளத்தின் பக்கமாகப் பெயர்ச்சி ஏற்படுகிறது. இதுவே வீனின் (Wien's) பெயர்ச்சி விதி (displacement law) எனப்படும்.

வீனின் ஆற்றல் பரப்பும் விதத்தைக் குறிக்கும் சூத்திரம் பரிசோதனை மூலம் வரையப்பட்ட படத்தில் குறைந்த அலை நீளப் பக்கத்திற்குப் பொருந்துமே ஒழிய, அதிக அலை நீளப் பக்கத்திற்குப் பொருந்தாது என்பதைப் பேஷன் (Paschen) என்பவர் கண்டுபிடித்தார். ஆனால் ரேலே-ஜீன்ஸ் சூத்திரம் அதிக அலை நீளப் பக்கம் பொருந்தும். ஆகவே கரும் பொருள் கதிர்வீச்சில் ஏற்பட்ட எந்த சூத்திரத்தினாலும் கதிர்வீச்சில் ஆற்றல் பரப்பப்பட்டுள்ள விதத்தை விவரிக்க முடியவில்லை. இதற்குக் காரணம் முது பழங் கொள்கையின் அடிப்படைத் (fundamental) தற்கோள்கள் (assumptions) எனக் கூறலாம். ஆகவே, முதுபழங் கொள்கையின் அடிப்படைத் தற்கோள்களை மாற்றி அமைக்க வேண்டும் என்ற ஒரு சூழ்நிலை ஏற்பட்டது.

(b) **ஒளி மின் விளைவு (Photo-electric Effect) :** ஒரு பொருளின் மேல் ஒளி படும்பொழுது பொருளின் பருமன் முழுவதிலுமிருந்து எலெக்ட்ரான்கள் விடுபடுகின்றன. இதை 1887ஆம் ஆண்டு ஹெர்ட்ஸ் (Hertz) என்னும் விஞ்ஞானி ஒரு பரிசோதனை மூலம் கண்டுபிடித்தார். உலோகக் குமிழ்களுக்கு இடைவெளியில் புற ஊதாக் கதிர்கள் விழும் பொழுது, மின் இறக்கம் (discharge) மிகவும் சுலபமாக நடைபெறுகிறது என்பதை நிரூபித்தார். அடுத்து ஹால் வாச் (Hall Wachs) என்பவர் துத்தநாகத் தகட்டின் (zinc plate) மீது புற ஊதாக் கதிர்கள் விழும்பொழுது அது நேர் மின்னூட்டம் (positive charge) பெறுகிறது. துத்தநாகத் தகட்டின் மேல் பாகம் எதிர் மின்னூட்டத் துகள்களை வெளிவிடுவதால் அது நேர் மின்னூட்டத் தன்மையை அடைகிறது. வெளிவிடும் துகள்களுக்கு ஒளி எலெக்ட்ரான்கள் (photo-electrons) என்றும், இந்தத் தோற்றப்பாட்டிற்கு (phenomenon) ஒளி மின் விளைவு என்றும் பெயர். தாம்சன் (Thomson) என்பவர் ஒளி எலெக்ட்ரானுடைய மின்னூட்ட நிறை தகவைக் (specific charge) கண்டுபிடித்து எதிர் மின் கதிரில் உள்ள எலெக்ட்ரானும் ஒளி எலெக்ட்ரானும் ஒன்றே என்பதை விளக்கினார்.

லெனார்டு (Lenard) என்பார் வெளியேற்றப்படும் எதிர் மின்னூட்டத் துகள்களின் தன்மை, ஒளி மின்னோட்டத்திற்கும்

ஒளியின் செறிவுக்கும் உள்ள தொடர்பு, ஒளி எலெக்ட்ரானுடைய ஆற்றல், அதன் திசை வேகம் இந்த இரண்டும் ஒளியின் அலை நீளத்தை எவ்வாறு சார்ந்துள்ளது என்பதைப் பற்றி ஆராய்ச்சி செய்தார். அவர் பயன்படுத்திய கருவியின் அமைப்பு படத்தில் (18) காட்டப்பட்டுள்ளது.



படம் 18. லெனர்டு பயன்படுத்திய கருவியின் அமைப்பு.

படத்தில் P என்பது எலெக்ட்ரான்களை வெளியேற்றும் பரப்பு. C என்பது உருளை. குறைந்த அலை நீளம் கொண்ட ஒளி குவார்ட்ஸ் (quartz) ஜன்னலின் W வழியாக Pயில் விழும்போது ஒளி எலெக்ட்ரான்கள் வெளியேற்றப்படுகின்றன. மின்கல அடுக்கின் மூலமாக உருளை C-க்கு விரும்பிய நேர் மின் அழுத்தத்தையோ அல்லது எதிர்மின் அழுத்தத்தையோ கொடுக்கலாம். Cயின் அழுத்தம் நேர் அழுத்தமாக இருக்கும்போது Pயிலிருந்து வெளியேற்றப்பட்ட ஒளி எலெக்ட்ரான்கள் Cயை நோக்கி ஈர்க்கப்படுகின்றன. ஒளி மின்னோட்டம் Cயிலிருந்து P-க்கு ஏற்படுகிறது. இதைக் கால்வனாமீட்டர் Gயின் மூலம் காணலாம்.

Cயினுடைய நேர் மின் அழுத்தம் அதிகரிக்கும்போது ஒளி மின்னோட்டமும் அதிகரிக்கும். C எதிர் மின் அழுத்தத்தை அடையும்போது கால்வனா மீட்டர் காட்டும் விலக்கமும் (deflection) குறையும். விலக்கம் இல்லாதபோது (no deflection) C-க்குக் கொடுக்கப்பட்ட எதிர் மின் அழுத்தத்திற்குத் தடுப்பு (stopping potential) மின்னழுத்தம் என்பது பெயர். இந்தத் தடுப்பு மின்னழுத்தமானது, ஒளியின் அதிர்வெண்ணைப் பொருத்துள்ளது. தடுப்பு மின்னழுத்தத்தைக் கண்டுபிடிப்பதன் மூலம் ஒரு குறிப்பிட்ட அதிர்வெண்ணில் ஒளி எலெக்ட்ரானுடைய அதிக

இயக்க ஆற்றலைக் (maximum kinetic energy) கண்டுபிடிக்கலாம். தடுப்பு மின்னழுத்தம் V_0 என்றும், ஒளி எலெக்ட்ரானுடைய பொருண்மை m என்றும், ஒளி எலெக்ட்ரானுடைய மின்னூட்டம் e என்றும், அதிக திசை வேகத்தை v_m என்றும் வைத்துக் கொண்டால் கீழ்க்கண்ட சமன்பாட்டை நாம் பெறுகிறோம்.

$$\tfrac{1}{2}\, m\, v_m^2 = e.\, V_o$$

$$\therefore \quad v_m = \sqrt{\frac{2\,V_o\,e}{m}} \qquad \ldots(5)$$

ஒளியின் செறிவு அதிகரித்தால் நிறுத்தும் மின்னழுத்தம் மாறாது. மேலே கண்ட பரிசோதனையின் முடிவை மூன்று பாகங்களாகப் பிரித்துக் கூறலாம். (i) ஓர் உலோகத்தின் மேல் பாகத்திலிருந்து ஒரு விநாடிக்கு வெளியேற்றப்பட்ட எலெக்ட்ரானின் எண்ணிக்கை அதை உண்டாக்கும் ஒளியின் செறிவுக்கு நேர்விகிதத்தில் உள்ளது. அதாவது ஏற்படும் ஒளி மின்னோட்டம் அதை உண்டாக்கும் ஒளியின் செறிவுக்கு நேர்விகிதத்தில் உள்ளது.

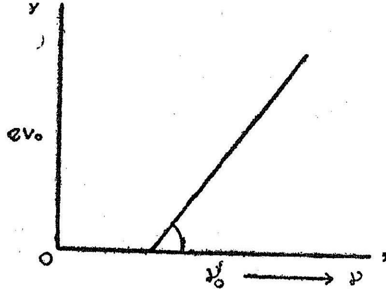
(ii) ஒளி எலெக்ட்ரானுடைய திசை வேகம், இயக்க ஆற்றல் இவை படுகின்ற ஒளியின் அதிர்வெண்ணைப் பொருத்துள்ளது; இது ஒளியின் செறிவைப் பொருத்ததன்று. ஒவ்வொரு உலோகத்திற்கும் ஒவ்வொரு பயன் தொடக்க அதிர்வெண் (Threshold Frequency) உண்டு. இது உலோகத்தின் தன்மையைப் பொருத்து அமைவதாகும்.

(iii) ஒளிமின் வெளியிடல் (Photo-electric Emission) கால தாமதம் இல்லாமல் நடைபெறக்கூடிய ஒரு தோற்றப்பாடு.

(iv) ஐன்ஸ்ட்டைனின் ஒளிமின் சமன்பாடு (Einstein's Photo-electric Equation) :

ஒளி எலெக்ட்ரானுடைய அதிக இயக்க ஆற்றலுக்கும் (ev_0) ஒளியினுடைய அதிர்வெண்ணுக்கும் ஒரு வரைபடம் வரைய வேண்டும் (படம் 19). அந்த வரைபடமானது ஒரு நேர் கோடாக இருக்கும். இந்த நேர்கோடு அதிர்வெண் அச்சில் ν_0 என்ற வெட்டுத் துண்டைப் (intercept) பெற்றிருக்கும். இந்த வெட்டுத் துண்டின் ν_0 பொருள் என்னவென்றால், ஒளியினுடைய அதிர்

வெண் ν_0க்கு குறைவாக இருக்கும்போது வெளிவீடும் பொருளானது (emitter) ஒளி எலெக்ட்ரான்களை வெளிவிடாது. இந்த ν_0 என்ற அளவு, வெளிவிடும் பொருள்களின் தனிச் சிறப்பு எண் (characteristic) ஆகும். இது ஒவ்வொரு பொருளுக்கும் மாறுபடும். இதற்குப் பயன் தொடக்க அதிர்வெண் என்பது பெயர்.



படம். 19. ஒளி எலெக்ட்ரானின் ஆற்றல்—அதிர்வெண் வரைப்படம் (E — γ).

நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டை

$eV_o = (\gamma - \gamma_o)$ என்று அமைக்கலாம்.

h என்பது நேர் கோட்டின் சாய்வு விகிதம் (slope) எனப்படும்.

ஆனால் $eV_o = \frac{1}{2} mv_m^2$

ஆகையால் $\frac{1}{2} m v_m^2 = h\gamma - h\gamma_o$

$$= h\gamma - w_o \quad ...(6)$$

$w_0 = h\gamma_0$ என்பது ஒளிமின் வேலைச் சார்பு (Photo-electric work function).

மேற்குறிப்பிட்ட பரிசோதனை மூலம் கிடைத்த முடிவுகளை முது பழம் மின்காந்த அலைக் கொள்கையினால் (Classical Electro-magnetic Wave Theory) விளக்கிக் கூறமுடியவில்லை. (i) உதாரணமாக, ஒளியானது உலோகத்தின் மேல் படும்போது அதன் மேல் உள்ள எல்லா அணுக்கள் மீதும் படுகின்றது. உடனே எல்லா அணுக்களும் எலெக்ட்ரான்களை உமிழ்கின்றன. ஒவ்வொன்றாக விடுவதில்லை. இது முது பழங் கொள்கையின் தத்துவம். ஆனால் பரிசோதனையில் வெளிவிடும் எலெக்ட்ரான்களின் எண்ணிக்கை ஒளியின் செறிவைப் பொருத்துள்ளது; ஒளிச் செறிவு அதிகமாக உள்ளபோது வெளிவரும் எலெக்ட்ரானின்

எண்ணிக்கையும் அதிகமாகும் என்பது முடிவு செய்யப்பட்டது. ஆகவே, இந்த முடிவை மேலே கூறிய முது பழங் கொள்கைப்படி விளக்க முடியவில்லை. (ii) எலெக்ட்ரான்களை வெளியேற்றும் தன்மை ஒளி அலையில் (light waves) மின் அழுத்தத்தின் ஆற்றலைப் (strength) பொருத்துள்ளது. ஒளிச் செறிவு மின் புலத்திற்கு (electric field) நேர் விகிதத்தில் உள்ளது. ஒளிச் செறிவு அதிகமாக ஒளி அலையில் உள்ள மின் புலம் அதிகமாகும். மின் புலம் அதிகமானால் வெளியேற்றப்படும் ஒளி எலெக்ட்ரான் களுடைய திசைவேகம், இயக்க ஆற்றல் இவை அதிகரிக்கும். இது மற்றுமொரு முதுபழங் கொள்கையின் தத்துவம். இதைக் கொண்டு பரிசோதனையில் முடிவு செய்யப்பட்ட ஒளி எலெக்ட்ரானின் திசைவேகம், இயக்க ஆற்றல் இவை படுகின்ற ஒளியின் செறிவைப் பொருத்தது அல்ல. ஆனால் ஒளியின் அதிர் வெண்ணைப் பொருத்தது என்பதை விவரித்துக் கூற முடியவில்லை.

(iii) வெளிவரும் ஒளி எலெக்ட்ரான் தனது இயக்க ஆற்றலைப் படுகின்ற ஒளியிடமிருந்து பெறுகிறது. அதாவது, உலோகத்திலுள்ள அணுவானது ஆற்றலை, படுகின்ற ஒளியிட மிருந்து பெற்று வெளியேறுகின்ற, ஒளி எலெக்ட்ரானுக்குக் கொடுக்கிறது. முதுபழங் கொள்கையின் தத்துவப்படி இது நடைபெற வேண்டுமானால் பல நாட்கள் ஆகும். ஆனால் பரிசோதனையின் முடிவுப்படி ஒளியின் உமிழ்வு காலதாமத மில்லாமல் (instantenous) அந்த கணத்தில் நடைபெறக் கூடிய ஒரு தோற்றப்பாடு ஆகும். ஆகவே மேற் கூறிய பரிசோதனையின் முடிவை முதுபழங் கொள்கையின் மூலம் விவரிக்க இயலவில்லை என்பது தெளிவாகும்.

(iv) பயன் தொடக்க அதிர் வெண்ணின் தோற்றத்தை முதுபழங் கொள்கையின் மூலம் விவரிக்க முடியவில்லை. ஆகவே, முதுபழங் கொள்கையின் தற்கோள்களை (assumptions) மாற்றி அமைக்க வேண்டும் என்ற ஒரு நிர்ப்பந்தம் ஏற்பட்டது.

(c) வெப்ப எண் (Specific heat) டியுலாங் மற்றும் பெட்டிட்டின் விதி (Dulong and Petit's Law)

டியுலாங் பெட்டிட்டின் விதியாவது: திடப் பொருளின் நிலையில் வெவ்வேறு மூலகங்களின் அணு எடை, வெப்ப எண் ஆகியவற்றின் பெருக்குத் தொகையானது ஒரு மாறிலியாகும். அதாவது அணுவின் வெப்பம் எல்லா மூலகங்களுக்கும் ஒன்றே; மேற்கூறிய டியுலாங் மற்றும் பெட்டிட்டின் விதியினால்வெப்பநிலை மாறுபடும்பொழுது எவ்வாறு வெப்ப எண் மாறுகிறது என்பதை

விவரிக்க முடியவில்லை. மேலும் வெப்ப எண்ணின் இயக்கவியல் கொள்கை (Kinetic Theory of Specific Heat) அணுவின் வெப்ப நிலையைப் பொருத்தது அன்று என்பதைக் கூறுகிறது. இது வெப்ப நிலை மாறுபடும் பொழுது வெப்ப எண்ணும் மாறுகிறது என்று பரிசோதனை மூலம் உறுதிபடுத்தப்பட்ட கொள்கைக்கு மாறாக இருக்கிறது. ஆகவே முதுபழங் கொள்கையை மாற்றி அமைக்க வேண்டிய ஒரு சூழல் ஏற்பட்டது.

(d) ரூதர்போர்டு கரு-அணு மாதிரி அமைப்பு (Rutherford Nuclear Atom Model)

ரூதர்போர்டு கரு-அணு அமைப்பினால் அணுவின் நிலைப் பாட்டினை (stability) விவரிக்க முடியவில்லை. உதாரணமாக இரண்டு எலெக்ட்ரான்கள் உள்ள ஓர் அணுவை எடுத்துக் கொள்வோம். இந்தக் கருவின் மின்னூட்டப் (charge) $2e$ ஆகும். எலெக்ட்ரான்கள் சமச்சீராக அமைந்திருக்கும்பொழுது கருவுக்கும் எலெக்ட்ரானுக்குமுள்ள விசையின் ஈர்ப்பு விசையின் (force of attraction) $\frac{2e^2}{r^2}$ ஆகும். ஆனால் விசையின் விலக்க ஆற்றல் $\frac{e^2}{4r^2}$ r என்பது கருவுக்கும் எலெக்ட்ரானுக்கும் இடையில் உள்ள தூரம். அதாவது, ஈர்ப்பு விசையானது விசையின் விலக்க ஆற்றலைப் போல எட்டு மடங்கு அதிகமாக உள்ளது. ஆகவே எலெக்ட்ரான் கருவின் மேல் விழுந்து அணுவின் நிலைச் சமன்பாட்டை அழித்து விடும். இக்குறையைப் போக்க ரூதர்போர்டு எலெக்ட்ரான்கள் கருவைச் சுற்றுகின்றன என்பதைத் தெரிவித்தார். ஆனால் இந்தக் கருத்து மற்றொரு இடையூறை (difficulty) உண்டாக்கியது. அதாவது, மின் காந்தக்கொள்கையில் (Electromagnetic Theory) ஒரு சுற்றும் எலெக்ட்ரான் தொடர்ந்து ஆற்றலை வெளிப்படுத்திக் கொண்டிருக்கும். முடிவில் எலெக்ட்ரான் தொடர்ந்து ஆற்றலை வெளிப்படுத்துவதால் சுருள் பாதையின் மூலமாக (spiral path) கருவை அடைந்துவிடும்; அணுவின் நிலைச் சமன்பாட்டை அழித்து விடும். அதாவது முது பழம் மின் காந்தக் கொள்கையினால் அணுவின் நிலைச் சமன்பாட்டை விவரித்துக் கூற முடியவில்லை என்பது தெளிவாகிறது.

(e) எக்ஸ் கதிர் சிதறல்-முது பழங் கொள்கை (Classical Theory of X-ray Scattering)

எக்ஸ் கதிர் சிதறலின் முது பழங் கொள்கையில் சிதறிய எக்ஸ் கதிர், படும் எக்ஸ் கதிரின் அலை நீளத்தைப் பெற்றிருக்க வேண்டும்; சிதறும் எண் (scattering coefficient) படும் எக்ஸ்

கதிரின் அலை நீளத்தைப் பொருத்தது அன்று, சிதறும் எக்ஸ் கதிர்கள் சமச்சீராக அமைந்திருக்க வேண்டும். மேற்கூறப்பட்ட எக்ஸ் கதிர், சிதறலின் முது பழங் கொள்கையின் உண்மைகள் பரிசோதனை மூலம் நிரூபிக்கப்பட்ட உண்மைகளுக்கு முற்றிலும் மாறாக உள்ளன. ஆகவே, எக்ஸ் கதிர் சிதறலின் முது பழங் கொள்கையை மாற்றி அமைக்க வேண்டிய ஒரு சூழ்நிலை ஏற்பட்டது.

ப்ளாங்க்கின் கதிர் வீச்சு குவான்டம் கொள்கை (Plank's Quantum Theory of Radiation)

1901ஆம் ஆண்டு மாக்ஸ் ப்ளாங்க் என்னும் விஞ்ஞானி முற்றிலும் புதுமையானதும் புரட்சிகரமானதுமான குவான்டம் கொள்கை என்னும் நவீனக் கருத்தை வெளியிட்டார். இக் கொள்கைப்படி வெப்பக்கதிர் ஆற்றல் முதுபழங் கொள்கையிலுள்ளது போல் தொடர்ந்து வீசப்படாமல், ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பற்ற முறையில் குறிப்பிட்ட திட்டவட்டமான ஆற்றலைக் கொண்ட குவான்டம் என்று அழைக்கப்படும். ஆற்றலின் அலகு ஒன்றின் முழு எண் மடங்குகளாக வெளியிடப்படும். உதாரணமாக, வெப்பக் கதிர்வீச்சின் அடுக்கம் γ என்று கொள்வோமாயின் ஒவ்வொரு குவான்டம் ஆற்றலும், $h\gamma$, $2h\gamma$, $3h\gamma$,..........$nh\gamma$ க்குச் சமமாகும். இங்கு h என்பது ப்ளாங்க்கின் மாறிலி எனப்படும். இக்குவான்டம் கொள்கைப்படி ப்ளாங்க் வெப்பக் கதிர் வீச்சுப்பற்றிய தெளிவான விதி ஒன்றைப் பெற்றார்.

கரும் பொருளின் உட்கூடு மின்நேர் போக்கு அலை வியற்றிகளைப் (electrical linear oscillators) பெற்றிருக்கின்றன என்று வைத்துக் கொள்வோம். இவ்வலை வியற்றிகள் ஒவ் வொன்றும் வெளிவிடும் ஆற்றலின் மதிப்பு $0, \xi, 2\xi, 3\xi, 4\xi$ ——$n\xi$ ஆகும். ξ என்பது ஒரு குவான்டத்தின் ($\xi = h\gamma$) மதிப்பு ஆகும்.

N_0 என்பது மிகக் குறைவாக அல்லது சுழிப்புள்ளி ஆற்றல் கொண்ட (zero point energy) நிலையில் (state) உள்ள அலைவியற்றிகள் என்று வைத்துக் கொள்வோம். மேக்ஸ்வெல் பங்கீட்டுக் கொள்கைப்படி சுழிப்புள்ளி ஆற்றலுக்கும் அதிகமாகப் பெற்றிருக்கும் அலைவியற்றிகளின் எண்ணிக்கை $N_0 e^{-\xi/KT}$ ஆகும். K என்பது போல்ட்ஸ்மன் மாறிலி, T என்பது சார்பிலா வெப்பநிலை.

$N_0, N_1, N_2, N_3 \ldots N_n$ என்பது $0, \xi, 2\xi, 3\xi, \ldots n\xi$ ஆற்றலைப் பெற்றிருக்கும் அலைவியற்றிகளாக இருந்தால், மொத்தமாக உள்ள அலைவியற்றிகள் $N_0 + N_1 + N_2 + \ldots N_n$ ஆகும்.

அதாவது,

$$N = N_0 + N_1 + N_2 + \ldots N_n \qquad \ldots(7)$$

$$= N_0 + N_0 e^{-\xi/KT} + N_0 e^{-2\xi/KT} + N_0 e^{-3\xi/KT} + \ldots\ldots N_0 e^{-n\xi/KT}$$

$r = e^{-\xi/KT} = e^{-h\gamma/KT}$ என்று வைத்துக்கொள்வோம்.

$$N = N_0 + N_0 r + N_0 r^2 + N_0 r^3 + \ldots N_0 r^{n-1} \qquad \ldots(8)$$

மேற்கூறிய சமன்பாடு பெருக்குத் தொடர்பைத் (geometric progression) தழுவி இருக்கிறது.

ஆகையால்,

$$N = N_0 \frac{(1 - r^n)}{1 - r} \quad (r < 1 \ldots\ldots \qquad \ldots(9)$$

ஆக இருக்கும்பொழுது)

$n = \infty$ (எண்ணிலி) ஆக இருந்தால்

$$N = \frac{N_0}{1 - r} = \frac{N_0}{1 - e^{-\frac{h\gamma}{KT}}} \qquad \ldots(10)$$

அலைவியற்றிகளின் மொத்த ஆற்றல்

$$E = \xi \times 0 \times N_0 + N_1 \xi + N_2 2\xi + N_3 3\xi + \qquad \ldots(11)$$

$$= 0 + h\gamma\, N_0 e^{-\frac{h\gamma}{KT}} + 2h\gamma\, N_0 e^{-\frac{2h\gamma}{KT}} + 3h\gamma\, N_0 e^{-\frac{3h\gamma}{KT}} + \ldots\ldots nh\gamma\, e^{-\frac{nh\gamma}{KT}} \qquad \ldots(12)$$

$$= h\gamma\, N_0 \left[1.\, e^{-\frac{h\gamma}{KT}} + 2.\, e^{-\frac{2h\gamma}{KT}} + 3.\, e^{-\frac{3h\gamma}{KT}} + \ldots\ldots \right]$$

$$e^{-\frac{h\gamma}{KT}} = r \quad \text{என்று கொண்டால்} \qquad ...(13)$$

$$E = h\gamma N_0 \left[r + 2r^2 + 3r^3 + \ldots\ldots nr^n \right] \qquad —(14)$$

$$Er = h\gamma N_0 \left[r^2 + 2r^3 + 3r^4 + 4r^5 + \ldots\ldots\ldots (n-1)r^n + nr^{n+1} \right] \qquad —(15)$$

சமன்பாடு 14 லிருந்து 15 ஐக் கழித்தால்

$$E(1-r) = h\gamma N_0 \left[r + r^2 + r^3 + r^4 + \ldots\ldots r^n \right] - nr^{n+1} \qquad ...(16)$$

சமன்பாடு (16)-ல் பிறை அடைப்பிலுள்ள r களின் அடுக்குகளின் கூட்டுத் தொகை பெருக்குத் தொடர்பைத் தழுவி இருப்பதால்

$$E(1-r) = h\gamma N_0 \left[r \quad \frac{(1-r^n)}{(1-r)} \right] - nr^{(n+1)} \qquad —(17)$$

அதாவது,

$$E = h\gamma N_0 \left[\frac{r(1-r^n)}{(1-r)^2} \right] - \frac{nr^{(n+1)}}{(8-r)} \qquad ...(18)$$

$n = \infty$ (எண்ணிலி) ஆக இருந்தால்,

$r < 1$ ஆக இருக்கும்பொழுது r^n & $r^{(n+1)} = 0$

$$E = h\gamma N_0 \frac{r}{(1-r)^2} = \frac{h\gamma N_0 e^{-\frac{h\gamma}{KT}}}{\left(1 - e^{-\frac{h\gamma}{KT}}\right)^2} \qquad ...(19)$$

சராசரி ஆற்றல் $\overline{E} = \frac{E}{N}$

சமன்பாடு (10)ஐ உபயோகப்படுத்தி

$$= \frac{h\gamma N_0 e^{-\frac{h\gamma}{KT}} \left(1 - e^{-\frac{h\gamma}{KT}}\right)}{\left(1 - e^{-\frac{h\gamma}{KT}}\right)^2 N_0}$$

$$= \frac{h\gamma e^{-\frac{h\gamma}{KT}}}{1 - c^{-\frac{h\gamma}{KT}}}$$

$$\overline{E} = \frac{h\gamma}{\left(e^{\frac{h\gamma}{KT}} - 1\right)}$$

மேக்ஸ் ப்ளாங்க் உபயோகப்படுத்திய ஒத்ததிர்வி (resonator) ஹெர்ட்ஸியன் (Hertzian) அலைவியற்றிகளைப் போன்றவை ஆகவே ஆற்றலின் அடர்த்தி ur என்று வைத்துக் கொண்டால்

$$ur\,dr = \frac{8\pi\gamma^2}{c^3}.\ Er\,dr \qquad \ldots(20)$$

இச்சமன்பாட்டில்

$ur = \gamma$ என்ற அதிர்வெண்ணைக் கொண்ட கதிர் வீச்சின் அடர்த்தி.

$Er = \gamma$ என்ற அதிர்வெண்ணைக் கொண்ட கதிர் வீச்சை வெளியிடக் கூடிய ஒத்த திர்வியின் சராசரி ஆற்றல் ஆகும்.

$urdr =$ அதிர்வெண் γக்கும் $(\gamma + d\gamma)$ க்கும் உள்ள வெளியில் வெளிப்படுத்தக்கூடிய ஆற்றலின் அடர்த்தி.

$c =$ மின் காந்த அலையின் திசைவேகம்

$$ur\,dr = \frac{8\pi\gamma^2}{c^3}.\quad \frac{h\gamma}{\left(e^{\frac{h\gamma}{KT}} - 1\right)}\,d\gamma$$

$$ur\,dr = \frac{8\pi h\gamma^3}{c^3}.\quad \frac{1}{\left(e^{\frac{h\gamma}{KT}} - 1\right)}\,d\gamma \qquad \ldots(21)$$

அதிர்வெண் γ, அலை நீளம் λ, மின் காந்த அலையின் திசை வேகம் c ஆக, இம்மூன்றையும் இணைக்கக்கூடிய சமன்பாடு

$$c = \gamma\lambda \qquad \ldots(22)$$

மேற்கூறிய சமன்பாட்டிற்கு வகையீடு கண்டால்

$$\gamma d\lambda + \lambda d\gamma = 0$$

$$\lambda d\gamma = -\gamma d\lambda$$

$$= -\frac{c}{\lambda}\, d\lambda$$

$$d\gamma = -\frac{c}{\lambda^2}\, d\lambda \qquad ...(23)$$

மேற்கூறிய சமன்பாடு (23) ல் எதிர்குறி (negative sign) அதிர்வெண் அதிகரிக்கும் பொழுது, அலை நீளம் குறையும் என்பதைத் தெரிவிக்கிறது.

சமன்பாடு (23)-ஐப் பயன்படுத்தி, சமன்பாடு (21)-ஐ கீழ்க் கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$u_\lambda\, d\lambda = \frac{8\pi h}{\lambda^3} \cdot \frac{1}{\left(e^{\frac{hc}{\lambda KT}} - 1\right)} \cdot \frac{c}{\lambda^2} \cdot d\lambda \qquad ...(24)$$

[மேற்கூறிய சமன்பாட்டில் இடது புறம் உள்ள $u_\lambda d\lambda$ என்பது அலை நீளம் λ க்கும் $(\lambda + d\lambda)$ க்கும் அல்லது அதிர்வெண் γக்கும் $(\gamma + d\gamma)$ க்குள் இடையில் வெளியிடக் கூடிய ஆற்றலின் அடர்த்தியைக் குறிப்பதால் சமன்பாடு (21)ல் இடது புறமுள்ள $d\gamma$க்கு சமன்பாடு (23)யை உபயோகப்படுத்த வேண்டிய அவசியம் இல்லை; வலது புறம் உள்ள $d\gamma$ க்கு மாத்திரம் சமன்பாடு (23)யை உபயோகப்படுத்தியுள்ளோம் என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.]

$$u_\lambda\, d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\left(e^{\frac{hc}{\lambda KT}} - 1\right)} \cdot d\lambda \qquad ...(25)$$

மேற்கூறிய சமன்பாடு கரும் பொருள் கதிர் வீச்சின் ஆராய்ச்சின் மூலம் தெளிவுபடுத்தக்கூடிய உண்மைகளை மிகவும் தெளிவாக விளக்கிக் கூறுகிறது. மேலும் கரும் பொருள் கதிர் வீச்சிலுள்ள இராலே-ஜீன்ஸ் (Rayleigh-Jeans) வின்ஸ் சமன்பாடு போன்றவைகளையும் நாம் பெற முடியும்.

குறைந்த அலை-நீளத்தில் $e^{\frac{hc}{\lambda KT}}$ அதிகமாகும். ஆகவே ப்ளாங்க்கின் வாய்ப்பாடு (25) ஐக் கீழ்க் கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$u\lambda\ d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot e^{-\frac{hc}{\lambda KT}} \cdot d\lambda \qquad \ldots(26)$$

மேற்கூறிய சமன்பாடு (26) வின்ஸ் வாய்ப்பாடு ஆகும். [அலைநீளம் λ குறைவாக இருக்கும் பொழுது $e^{\frac{hc}{\lambda KT}} >> 1$. ஆகவே தொகுதியில் (denominator) உள்ள 1ஐ புறக்கணித்து விடலாம்.]

அலை நீளம் அதிகமாக இருக்கும் பொழுது $e^{\frac{hc}{\lambda KT}}$ ஐ அடுக்குக்குறித் தேற்றத்தின் (exponential theorem) மூலமாக விரித்து $\left(e^{\frac{hc}{\lambda KT}} - 1\right)$ ஐ $\frac{hc}{\lambda KT}$ என்று எழுதலாம். [அதாவது $e^{\frac{hc}{\lambda KT}} = 1 + \frac{hc}{\lambda KT}$; இங்கு அலை நீளம் அதிகமாக இருக்கும் பொழுது $\frac{hc}{\lambda KT}$ யின் இரண்டு அடுக்கு, மூன்று அடுக்கு முதலியவைகளை விட்டு விடலாம்.]

ஆகவே சமன்பாடு (25) ஐ

$$u\lambda\ d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\frac{hc}{\lambda KT}} \cdot d\lambda$$ என்று எழுதலாம்.

$$= \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot \frac{\lambda KT}{hc} \cdot d\lambda$$

$$u\lambda\ d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4}\ KT\ d\lambda \qquad \ldots(27)$$

சமன்பாடு (27) இராலே-ஜீன்ஸ் கோவையைக் குறிக்கிறது.

பரிசோதனைகள் மூலம் ஆற்றல் பங்கீட்டு முறைபற்றிய வரை படத்தை இந்தக் கோவையைக் (25) கொண்டு எளிதில் விளக்கம் தந்தார். எனவே செயல் முறையில் கிடைத்த கருத்துக்களும் மேற்கூறிய கோட்பாட்டில் உள்ள கருத்துக்களும் ஒன்ருகவே இருந்தன.

மேக்ஸ் ப்ளாங்க் கண்டுபிடித்த புதுமையானதும் புரட்சிகரமானதுமான குவான்டம் கொள்கையைப் பேராசிரியர் ஐன்ஸ்டைன் பயன்படுத்தி 1905ஆம் ஆண்டு ஒளிமின் விளைவையும், 1907ஆம் ஆண்டு திடப் பொருள்களின் வெப்ப எண்களையும் மிகத் தெளிவாக விளக்கிக் கூறினார். 1913ஆம் ஆண்டு போர் (Bohr) என்னும் விஞ்ஞானி குவான்டம் கொள்கையை உபயோகப்படுத்தி அணு அமைப்புப் பற்றியும் நிறமாலைக்கோடுகள் (spectral lines) எவ்வாறு பிறக்கின்றன என்பதையும் விவரித்துக் கூறினார். 1922ஆம் ஆண்டு காம்ப்டன் (Compton) என்பவர் எக்ஸ் கதிர் சிதறலின் தோற்றப் பாட்டையும் (Phenomenon of X-ray Scattering) விளக்கிக் கூறினார்.

மேற்கூறிய ப்ளாங்க்கின் கோட்பாடு குவான்டம் விசையியலுக்கு அடித்தளமாக அமைகிறது.

4.2. பொருளின் இருமைப் பண்பு (Dualism of Matter)

பொருளின் அலையியல்பு (Wave Nature of Matter)

ஒளியின் அலைக்கொள்கையை உபயோகப்படுத்தி ஒளியின் குறுக்கீட்டு விளைவு (interference) விளிம்பு விளைவு (diffraction), தளவிளைவு (polarization) இவற்றை விவரித்துக் கூற முடிந்தது. ஒளிமின் விளைவு (photo-electric effect) காம்ப்டன் விளைவு போன்றவைகளைப் பேராசிரியர் ஐன்ஸ்டைன் வெளியிட்ட ஒளி என்பர். ஃபோட்டான் என்னும் துகள்களால் (குவான்டங்களால்) ஆனது என்னும் கொள்கையைப் பயன்படுத்தி விளக்க முடிந்தது. அதாவது ஒளியானது இருமைப் பண்புகள்—அலை மற்றும் துகள் பண்புகள் கொண்டது என்பது ஏற்றுக் கொள்ளப்பட்டது. குவான்டம் கொள்கை வந்த பிறகு வீசுகதிர் ஆற்றல் இருமைப் பண்புகள்—அலை மற்றும் துகள் பண்புகள் கொண்டது என்பதை ஒப்புக் கொண்டார்கள். 1924ஆம் ஆண்டு பிரான்ஸின் விஞ்ஞானி லூயி டிப்ராய்லி (Louis de Broglie) என்பவர் கதிர் வீச்சினைப் போன்றே பொருளும் இருமைப் பண்புகள்—அலை மற்றும் துகள் பண்புகள் கொண்டது என்று கூறினார். அதாவது எலெக்ட்ரான்கள், அணுக்கள், மூலக் கூறுகள், ஃபோட்டான்கள் முதலியவை போன்று தனித்துகள்களால் ஆகி இருப்பதாகக் கருதப்படும் பொருள் சில சந்தர்ப்பங்களில் அலையியல்பினைக் காட்டக்கூடும்

என்று கூறினர். இவ்வாறு பொருளைச் சார்ந்த அலைகளுக்குப் பொருள் அலைகள் (matter waves) என்றும் டிப்ராய்லி பொருள் அலைகள் என்றும் பெயர் வழங்கலாயிற்று (படம் 20).

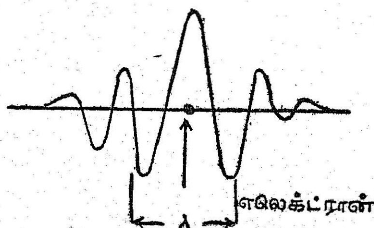
டிப்ராய்லி இப்புரட்சிகரமான கருத்தை வெளியிட்டதுடன் நில்லாது, ஓர் அலையின் முக்கியப் பண்பு அதன் அலை நீளமாதலால், அதன் மதிப்பையும் கண்டுபிடித்தார்.

டிப்ராய்லியின் அலைநீளம் (DeBroglie Wave length)

ஐன்ஸ்டைன் சார்புக் கொள்கையின் தத்துவத்தையும் (Einstein's Principle of Relativity), நிலையான அலை அமைப்பின் சமன்பாட்டையும் உபயோகப்படுத்தி பொருள் அலையின் அலை நீளத்தைக் கண்டுபிடிக்கலாம். உதாரணமாக, எலெக்ட்ரான் போன்ற ஒரு துகள், அது இருக்கும் இடத்தில் ஒரு நிலையான அலை அமைப்பைக் கொண்டதாகக் கருதுவோம். மடங்கி மடங்கி வரும் மாற்றங்களை அடைகின்ற கணியத்தை (quantity) ψ எனக் கொள்வோம். எந்த நேரத்திலும் t_0, துகளுக்குப் பக்கத்திலுள்ள $x_0 y_0 z_0$ என்னும் புள்ளியில் அதன் மதிப்பு $\psi = \psi_0 \sin 2\pi \gamma_0 t_0$ எனப்படும். இதில் ψ_0 என்பது எடுத்துக்கொண்ட புள்ளியிலுள்ள வீச்சு (amplitude) ஆகும். γ_0 என்பது துகளைப் பொருத்து அசையாதிருக்கும் ஒரு நோக்குநர் (observer) கண்ட அதிர்வு எண் ஆகும்.

இப்போது அத்துகளுக்கு X திசையில் V என்னும் வேகம் கொடுக்கப்படுவதாக வைத்துக்கொள்வோம். சார்பியல் கொள்கையின் மாற்றச் சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி

$$t_0 = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$ என அமைக்கலாம். ...(1)



படம் 20. டிப்ராய்லி அலை—கருத்துப் படம்

$$\therefore \quad \psi = \psi_o \sin \frac{2\pi\gamma_o \left(1 - \frac{vx}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \ldots(2)$$

இச்சமன்பாட்டினை அலையியக்கச் (wave motion) சமன்பாடாகிய

$$y = A \sin \left(\frac{2\pi}{T}\right) \left(t - \frac{x}{u}\right) \qquad \ldots(3)$$

என்பதுடன் ஒப்பிட்டு நோக்கவேண்டும். இதில் A என்பது வீச்சு, T என்பது அலைவு நேரம். மற்றும் u என்பது x திசையில் அதன் வேகம் ஆகியவற்றைக் குறிக்கின்றன.

சமன்பாடு (2)ஐ (3)வுடன் ஒப்பிட்டு நோக்கினால்

$$u = \frac{c^2}{v} \text{ மற்றும் } \frac{1}{T} = \gamma = \frac{\gamma_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \ldots(4)$$

என அறிகிறோம்.

ஐன்ஸ்டைன் நிறை-ஆற்றல் (mass-energy) தொடர்பிலிருந்து $h\gamma_0 = m_0 c^2$ அல்லது $\gamma_0 = \frac{m_0 c^2}{h}$ ஆகிறது. 3 இங்கு m_0 நிலைப் பொருண்மை ஆகும்.

$$\therefore \quad \gamma = \frac{m_0 c^2}{h\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{mc^2}{h} \qquad \ldots(5)$$

$$\text{பொருளின் அலை நீளம் } \lambda = \frac{\text{வேகம்}}{\text{அதிர்வு எண்}}$$

$$= \frac{u}{\gamma} = \frac{c^2/v}{mc^2/h} = \frac{h}{mv} \qquad \ldots(6)$$

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{P},$$ P என்பது உந்தம்.

ஆகவே ஒரு பொருளின் துகள் இயங்கும்போது இரு வேறு வேகங்களில் அது பங்கேற்கின்றன. ஒன்று துகளின், திசை வேகம் v என்பது, மற்றொன்று துகளுடன் சேர்ந்திருக்கும் அலை

செல்லுகின்ற வேகம் *u*. இவ்விரு வேகங்களும் $u = \frac{c^2}{v}$ என்னும் சமன்பாட்டால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. துகளின் வேகமாகிய *u* ஒளியின் வேகமாகிய *c*ஐ விடச் சிறியது. எனவே துகளுடன் சேர்ந்த அலையின் வேகம் *c*ஐக் காட்டிலும் அதிகம். இதிலிருந்து டிப்ராய்லியின் அலைகள் கதிர் வீச்சு அலைகளைப் போன்றவை அல்ல என்பது புலப்படுகிறது. கதிர் வீச்சு எப்போதும் மாறாத ஒளியின் வேகத்தில் செல்லக் கூடியதாகும். டிப்ராய்லியின் பொருளின் அலையின் அலை நீளத்தின் மதிப்பைக் கணக்கிடுதல்.

எதிர் மின்கதிரில் (cathode ray) உள்ள எலெக்ட்ரான் V என்னும் மின்னழுத்த வேறுபாட்டினால் முடுக்கம் பெறுகிறது என வைத்துக் கொள்வோம். எலெக்ட்ரானின் இயக்க ஆற்றலின் மதிப்பு $\frac{1}{2}mv^2$. இதில் *m* என்பது எலெக்ட்ரானின் பொருண்மை, *v* என்பது அதன் வேகம். *c* என்பது எலெக்ட்ரானின் மின்னூட்டம் என வைத்துக் கொண்டால் எலெக்ட்ரானின் இயக்க ஆற்றல்

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{eV}{300} \quad \ldots(7)$$

அதாவது $$mv = \sqrt{\frac{meV}{150}} \quad \ldots(8)$$

சமன்பாடு (6)லிருந்து

$$\lambda = \frac{h}{mv} = h \sqrt{\frac{150}{meV}} \quad \ldots(9)$$

இதில் *e*, *m* மற்றும் *h* இவைகளின் மதிப்பை உபயோகப் படுத்தினால் $\boxed{\lambda = \sqrt{\frac{150}{V}} \cdot 10^{-8} \text{ செ.மீ.}}$ ...(10)

மின்னழுத்த வேற்றுமை 150 வோல்ட்டாக இருக்கும்போது அலை நீளம் 1Å., மின்னழுத்த வேற்றுமை 15000 வோல்ட்டாக அதிகரிக்கும் போது, அலை நீளம் 0·1 Å ஆக அமையும். இவை எக்ஸ் கதிரின் அலைநீள எல்லைக்குள் இருக்கின்றன. ஆகையால் எக்ஸ் கதிர்களைப் போலவே இதையும் ஆராய வழிகள் பிறந்தன.

1. டேவிசன் மற்றும் ஜெர்மர் ஆகியோர் கண்ட எலெக்ட்ரான் விளிம்பு விளைவு பற்றிய பரிசோதனைகள். (Experiment of Davisson and Germer on the diffraction of electrons):

1927ஆம் ஆண்டு டேவிசன் மற்றும் ஜெர்மர் என்னும் இரு அமெரிக்க பௌதிக அறிஞர்கள் டிப்ராய்லி கூறிய எலெக்ட்ரான் அலைகளை விஞ்ஞான ஆராய்ச்சி மூலம் தெளிவுபடுத்திக் கூறினார்கள். மேலும் விளிம்பு விளைவு முறையில் மெதுவாகச் செல்லும் எலெக்ட்ரான்களுக்கு டிப்ராய்லியின் அலை நீளத்தின் மதிப்பையும் கண்டுபிடித்தார்கள். இது தற்செயலாக ஏற்பட்ட கண்டுபிடிப்பாகும். டேவிசன் மற்றும் ஜெர்மர் இருவரும் நிக்கல் இலக்கிலிருந்து எவ்வாறு எலெக்ட்ரான்கள் பிரதிபலிக்கின்றது என்று ஆராய்ச்சி செய்து கொண்டிருந்தார்கள். தற்செயலாக நிக்கல் இலக்கு பெரிய படிகங்களின் தொகுப்புகளாக மாறுகிற அளவுக்கு அதிக வெப்பநிலைக்கு சூடுபடுத்தப்பட்டன. இதன் விளைவாக எலெக்ட்ரான்களின் பிரதிபலிப்பில் முரண்பாடுகள் உண்டாயின. அதாவது பிரதிபலிப்புச் செறிவு (reflected intensity) கோண நிலையிலிருந்து குறைந்து காணப்படுவதற்குப் பதிலாக மிகத் தெளிவான பெருமங்களையும் சிறுமங்களையும் பெற்றிருந்தன. எதிர்பாராத விதமாக ஏற்பட்ட இவ்விளைவினால் எலெக்ட்ரான் கதிர்களும், எக்ஸ் கதிர்களைப்போலவே படிகங்களில் விளிம்பில் விளைவு உண்டாக்குமென கண்டறிந்தனர். ஒரு நிக்கல் படிகங் கொண்ட இலக்கினைத் தயாரித்து ஆராய்ச்சி செய்து, எலெக்ட்ரான் கதிர்கள் அலைப்பண்புகளைக் கொண்டவை எனத் தெளிவுபடுத்தினர்.

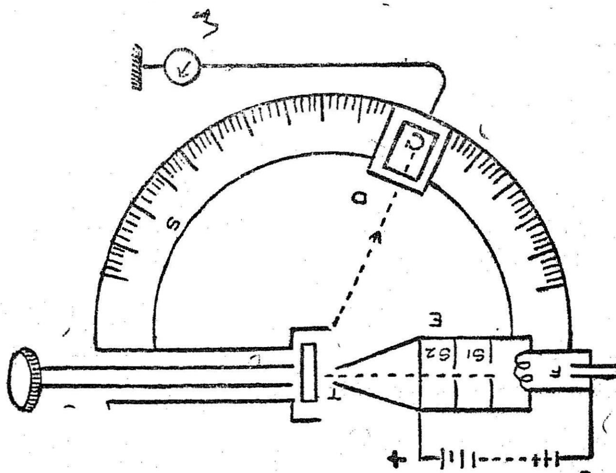
உண்மையில் எலெக்ட்ரான் கதிர்களால் பிரதிபலிக்கவும், விளிம்பில் விலகவும்; திசை விலகவும் (refraction) இயலும் என்பதைத் தெளிவுபடுத்தினர்.

செய்முறை அமைப்பு

படம் 21-ல் எலெக்ட்ரான் துப்பாக்கி *E* எலெக்ட்ரான் கதிர்களை வெளி விடுகிறது. இந்த எலெக்ட்ரான் துப்பாக்கி (i) *F* என்னும் டங்ஸ்டன் இழை (ii) டங்ஸ்டன் இழைக்கும் கூடான உருளைக்கும் (hollow cylinder) இடையில் உள்ள மின்னழுத்த வேறுபாட்டினால் எலெக்ட்ரான்களுக்கு முடுக்கம் கொடுக்கக் கூடிய வசதி (iii) எலெக்ட்ரான்களை மெல்லிய கதிர்களாக ஒரு வரிசைப்படுத்தப்பட்ட பிளவுகள் *S* (slits) ஆகியவைகளைப் பெற்றிருக்கின்றன.

பிளவுகளால் ஒரு வரிசைப்படுத்தப்பட்ட எலெக்ட்ரான் கதிர்கள் *T* என்னும் இலக்கின் மேல் விழுந்து வெவ்வேறு திசைகளில் பிரதிபலிக்கின்றன. இவ்வாறு பிரதிபலிக்கப்பட்ட எலெக்ட்ரான் கதிர்கள் பாரடே உருளையைக் கொண்டு (Faraday

cylinder) அளவிடப்படுகின்றன. பாரடே உருளை ஒரு மின்னோட்ட அளவியுடன் (galvanometer) இணைக்கப்பட்டுள்ளது. மேலும் கோணம் 20க்கும் 90க்கும் இடையில் பிரதிபலிக்கப்படும் எல்லா எலெக்ட்ரான் கதிர்களையும் ஏற்பதற்கு ஏற்றவாறு பாரடே உருளை ஒரு வட்ட அளவு கோலின் மேல் நகரும் வண்ணம் அமைக்கப்பட்டிருக்கின்றது. அதிக வேகங்களைக் கொண்ட எலெக்ட்ரான்கள் மட்டுமே சேமிப்பு அறையில் நுழைந்து மின்னோட்ட அளவியால் உணரப்படுகின்றன. மோதல்களினால் ஏற்படும் இரண்டாம் நிலை எலெக்ட்ரான்கள் (secondary electron) D என்னும் காப்பிடப்பட்ட (insulated) இரு சுவர்களுக்கிடையில் உள்ள எதிர் முடுக்க மின்னழுத்தத்தினால் (retarding potential) சேமிப்பு அறையை அடைவதில்லை.

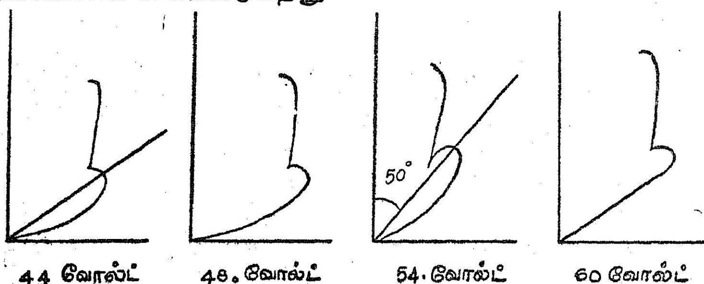


படம் 21. டேவிசன் மற்றும் ஜெர்மர் பரிசோதனை

செய்முறையில் கையாளப்பட்ட இரு வேறு முறைகள்
(a) படிகத்தின் மேல் நேர்க்குத்தாகப் படும் எலக்ட்ரான் கதிர்கள்:

படிகத்தின் மேல் நேர்க்குத்தாக எலெக்ட்ரான் கதிர்கள் விழும்போது, படிகத்தூள் ஒவ்வொரு திசை சார்பிலும் (azimuth) எலெக்ட்ரான்கள் பிரதிபலிக்கின்றன. பாரடே உருளை மூலம் வெவ்வேறு இடங்களில் பொருத்தி வைக்கப்பட்டு மின்னோட்ட அளவியால் குறிக்கப்படுகின்றன. மின்னோட்ட அளவி தரும் மின்னோட்டம், விளிம்பு விளைவை எலெக்ட்ரான் கதிர்களின் செறிவைக் குறிப்பதால், மின்னோட்டத்திற்கும், படுக்கதிருக்கும் சேமிப்பு அறையில் நுழைகின்ற கதிருக்கும் இடையில் உள்ள

கோணத்திற்குமாக ஒரு வரைபடம் வரையப்படுகின்றது. இச் செயல்முறை முடுக்கம் தரும் மின்னழுத்தத்தின் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்குத் திரும்பத் திரும்பச் செய்யப்பட்டுச் செய்முறைக் குறிப்புகள் எடுக்கப்படுகின்றன. இதற்கான வளைகோட்டு வரிப் படங்கள் (curves) படம் 22-ல் காட்டப்பட்டுள்ளன. 44 வோல்ட்டில் முடுக்கம் கொடுக்கப்பட்ட எலெக்ட்ரான் களுக்கு வளைகோட்டில் ஒரு புடைப்பு (bump) தோன்ற ஆரம்பிக்கிறது. முடுக்கம் தரும் வோல்ட் அதிகமாக அதிகமாக புடைப்பு பெரும நிலையை 54 வோல்ட்டில் அடைகிறது. இதற்கு மேலும் முடுக்கந் தரும் மின்னழுத்த மதிப்பு அதிகமாக, புடைப்பு மேலும் மேலும் குறைய ஆரம்பித்து சுமார் 68 வோல்ட்டில் தென்படாமல் போய்விடுகிறது.



படம் 22. டேவிசன் மற்றும் ஜெர்மர் பரிசோதனை முடிவுகளை விளக்கும் படங்கள்

புடைப்புத் தோன்றுவது எலெக்ட்ரான் அலையியல்பைக் கொண்டவை என்பதற்கு நல்ல சான்றாக அமைகிறது. ஏனெனில் டிப்ராய்ல் கொள்கைப்படி 54 வோல்ட் எலெக்ட்ரான் கதிரின் அலை நீளம்

$$\lambda = \sqrt{\frac{150}{54}}\ \mathring{A} = 1.66\ \mathring{A} \text{ ஆகிறது.} \quad \ldots(11)$$

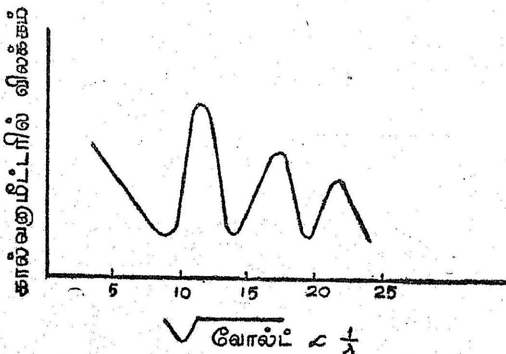
பிராக்கின் (Bragg) $n\lambda = d \sin\theta$ என்னும் சமன் பாட்டினைப் பயன்படுத்தி λஐ அடையலாம். இதில் n என்பது இங்கு முதல் வரிசையையும், (order) d என்பது நிக்கல் படிகத்தின் அணிக்கோவைத் தூரத்தையும், θ என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட முடுக்கம் தரும் மின்னழுத்தத்தில் செறிவு உச்சமாக இருக்கும்போது, படுக் கதிருக்கும், சேமிப்பு அறையில் நுழைகின்ற கதிருக்கும் இடையிலுள்ள கோணத்தையும் குறிக்கின்றன. படிகவியல் (crystallographic analysis) ஆய்வு முறையில் $d = 2.15$ 'ஆங்ஸ்ட்ராம் அலகு' (*A. u*) ஆகும். $n=1$

$$\lambda = 2.15 \sin 50^{\circ} = 1.65 \text{ Å} \qquad ...(12)$$

மேற்கூறிய சமன்பாடுகள் (11) மற்றும் (12)லிருந்து λ-இன் அளவில் காணப்பட்ட சீரிய பொருத்தத்திலிருந்து எலெக்ட்ரான் கதிர் எக்ஸ் கதிரைப் போலவே செயல்படுகிறதென்பதைக் காட்டுகிறது. மேலும் பிரதிபலிக்கும் தளங்களில் விளிம்பில் விலகல் ஏற்படுவதால் உண்மையிலேயே எலெக்ட்ரான் கதிர் அலைப் பண்புகளைக் கொண்டிருப்பது தெரிகிறது.

(b) படிகத்தின் மேல் எலெக்ட்ரான்களை சாய்வாகப் படச் செய்தல் (Oblique Incidence)

எலெக்ட்ரான் துப்பாக்கியையும், சேமிக்கும் அறையையும் நிலையாக வைத்துவிட்டால், படுகதிர் மற்றும் பிரதிபலிக்கப்பட்ட கதிர் இவற்றின் சாய் கோணங்களை (glancing angles) மாறாமலிருக்குமாறு செய்யலாம். முடுக்க மின்னழுத்தம் மாறும்போது எலெக்ட்ரானின் வேகமும் மாறுவதால், ஒவ்வொரு மின்னழுத்தத்திற்கும் மின்னோட்ட அளவி காட்டும் மின்னோட்டம் குறிக்கப் படுகின்றது. மின்னோட்டத்தின் மதிப்புகளுக்கும், முடுக்கம் தரும் மின்னழுத்தத்திற்குமாக வரையப்பட்ட வரைபடம் (graph) படம் 23-ல் காட்டப்பட்டுள்ளது. இப் படத்தில் பல்வேறு கூரிய பெருமங்களைக் (sharp maxima) கொண்ட வளைகோடு (curve) ஒன்று கிடைக்கிறது.



படம் 23. மின்னோட்டத்திற்கும், முடுக்கம் தரும் மின்னழுத்தத்திற்கும் வரையப்பட்ட வரைபடம்

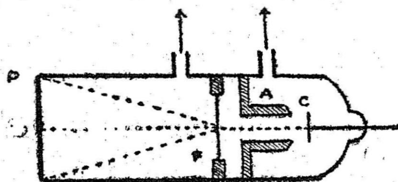
வெவ்வேறு பெருமங்கள் வெவ்வேறு வரிசைகளைக் (order) குறிக்கின்றன. வளைகோட்டிலிருந்து ஒவ்வொரு வரிசைக்கும்

பெருமப் பிரதிபலிப்பு (maximum refraction) தரும் மின்னழுத்தத்தின் மதிப்பைக் கணக்கிடலாம். டிப்ராயில் சமன்பாடாகிய $\lambda = \left(\frac{150}{V}\right)^{\frac{1}{2}}$ யை உபயோகப்படுத்தி λ-வைக் கணக்கிடலாம். சாய்கோணம் θ, நிக்கல் படிகத்தின் அணிக்கோவைத் தூரம் d இவற்றின் தெரிந்த மதிப்பினைப் பயன்படுத்தி பிராக்கின் சமன்பாடாகிய $n\lambda = 2d \sin \theta$-ன் உதவியால் λ-வைக் கணக்கிடலாம். இவ்வாறு இரு வழிகளிலும் கணக்கிட்ட λ-வின் மதிப்பு மிகவும் ஒத்திருந்தது. இதிலிருந்து எலெக்ட்ரான் அலைப் பண்பைக் கொண்டுள்ளது என்பது தெளிவாகிறது.

2. ஜீ. பி. தாம்சனின் பரிசோதனை (Experiment of G.P. Thomson):—

1928ஆம் ஆண்டு ஸ்காட்லாந்தில் ஜீ. பி. தாம்சன் என்பவர், 10,000லிருந்து 50,000 வோல்ட் வரை கொண்ட உயர் வேகமுடைய எலெக்ட்ரான்களை (high speed electrons) மெல்லிய தகடுகொண்டு விளிம்பில் விலகச் செய்து எலெக்ட்ரான் அலைகளைப் பற்றி ஆராய்ந்து, எலெக்ட்ரான் கதிர் அலைகளைப் போலவே செயல்படுகின்றன என்பதைத் தெளிவாகக் காட்டினார்.

கருவி : அவர் உபயோகப்படுத்திய செய்முறை அமைப்புப் படம் 24-ல் காட்டப்பட்டுள்ளது. எலெக்ட்ரான்கள் மின்னிறக்கக் குழாயிலிருந்து (discharge tube) A என்னும் துளை வழியே அனுப்பப்பட்டுச் சிறந்த மெல்லிய எலெக்ட்ரான் கதிர்களாக்கப்படுகின்றன. பின்னர் இக்கதிர் தங்கம், வெள்ளி, அலுமினியம் போன்றவற்றால் ஆன மெல்லிய உலோகத் தட்டில் (F-ல்) விழும்படி செய்யப்படுகிறது.



படம் 24. ஜீ. பி. தாம்சனின் பரிசோதனை

சிதறலடைந்த எலெக்ட்ரான்களை P என்னும் போட்டோத் தகடு பதிவு செய்கிறது. பின்னர் போட்டோத் தகட்டைக் கழுவிப் பார்த்தால் சரி சீரமைவு கொண்ட மையப் புள்ளியுடன் கூடிய மைய வட்டங்களின் (concentric circles) அமைப்புக் கிடைக்கிறது. "எக்ஸ்" கதிர்களின் விளிம்பு விளைவும் இம்

மாதிரியான வட்ட வடிவ அமைப்பினைக் கொடுக்கும் என்பதை நாமறிவோம். ஆனால் இங்கு கிடைத்துள்ள அமைப்பு (pattern) எக்ஸ் கதிர்களினால் அல்லாமல், எலெக்ட்ரான்களின் விளிம்பு விளைவினால்தான் ஏற்பட்டுள்ளது என்பதை காந்த புலத்தினைக் கொண்டு நிரூபிக்கலாம். இவ்வட்டவடிவ அமைப்பு எலெக்ட்ரான்களின் விளிம்பில் விலகலால்தான் ஏற்படுகிறது. ஆகவே, இச் சோதனை எலெக்ட்ரான் கதிர் அலைகளைப் போலவே செயல் படுகிறது என்பதைத் தெளிவாகக் காட்டுகிறது.

எலெக்ட்ரான் நுண்ணோக்கி (Electron Microscope)

எலெக்ட்ரான் அலைகளின் நடைமுறைப் பயன் எலெக்ட்ரான் நுண்ணோக்கி அமைப்பில் பயன்படுத்தப்பட்டன. இது எலெக்ட்ரான்கள் அலையியல்பினையும் கொண்டுள்ளது என்பதற்கு மற்றும் ஒரு சான்றாகும். ஒளி நுண்ணோக்கியைப் போலவே, எலெக்ட்ரான் நுண்ணோக்கி சிறு பொருள்களைப் பெரியதாகக் காட்டக்கூடியது. ஒளி நுண்ணோக்கியில் ஒளிக்கதிர்களைப் பயன் படுத்துகிறோம்; ஆனால் எலெக்ட்ரான் நுண்ணோக்கியில் எலெக்ட்ரான் கற்றையைப் (beam) பயன்படுத்துகிறோம். எலெக்ட்ரான் நுண்ணோக்கி அமைப்பிற்குக் காரணமாக இருந்த இரு முக்கியத் தத்துவங்களாவன :

(1) ஒளி அலையியல்பினைப் பெற்றிருப்பது போல, எலெக்ட்ரான்களாகிய துகள்கள் அலைப்பண்பைப் பெற்றிருக் கின்றன.

(2) எவ்வாறு ஒளிக் கதிர்களைக் கண்ணாடி வில்லை (lens) கொண்டு ஒரு புள்ளியில் குவிக்கலாமோ அதுபோல் எலெக்ட்ரான் கதிர்களையும் மின்புலம், காந்தப் புலம் இவற்றைக் கொண்டு குவிக்கவும் விரிக்கவும் முடியும்.

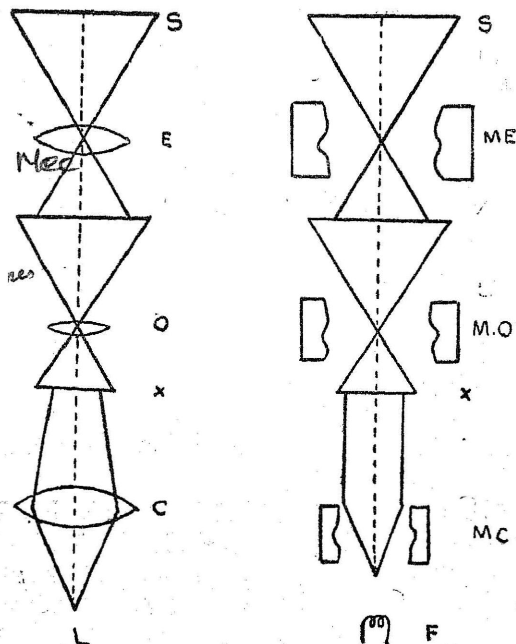
மேற்கூறிய இரு தத்துவங்களையும் பயன்படுத்தித்தான் எலெக்ட்ரான் நுண்ணோக்கியை நிறுவ முற்பட்டனர். ஒரு நுண்ணோக்கியின் மூலம் பொருளை உருப்பெருக்கம் செய்வது அந்த நுண்ணோக்கியில் பயன்படுத்தப்படும் ஒளியின் அலை நீளத்தைப் பொருத்துள்ளது. அதாவது ஒளியின் அலை நீளத்திற்குக் குறைவாகப் பரிமாணம் (dimension) உள்ள பொருள்களை உருப்பெருக்கம் செய்ய முடியாது. ஏனெனில் ஒளி அலை அவை மீது சிதறலின்றிப் பாய்ந்து சென்று விடும். ஒளி அலைகளின் நீளம் 0.00004 செ.மீ. லிருந்து 0·00007 செ.மீ. வரை இருப்பதால் இதைவிடச் சிறிதான பொருட்களைக் காண

முடியாது. ஆகவே ஒளி அலைகளின் நீளத்தைக் காட்டிலும் மிகக் குறைவான பரிமாணமுள்ள பொருட்களை உருப்பெருக்கம் செய்ய வேண்டும் என்றால் ஒளி அலைகளின் நீளத்தைக் காட்டிலும் மிகக் குறைவாகவுள்ள எலெக்ட்ரான் அலைகளைப் பயன்படுத்த வேண்டும் என்ற உண்மை தெரிய வந்தது. ஒளியைக் கொண்டு உயர்ந்தபட்சம் 2,500 மடங்குதான் உபயோகமான உருப் பெருக்கம் செய்யலாம். 75,000 வோல்ட்டு மின்னழுத்தத்தால்

முடுக்கப்பட்ட எலெக்ட்ரான்களின் அலைநீளம் $\lambda = \sqrt{\frac{150}{75,000}} =$

0·045 *A. u.* இது ஒளி அலைகளைவிடச் சுமார் 133000 மடங்கு சிறியது. ஆகவே நுண்ணோக்கிகளில் ஒளிக்குப் பதிலாக எலெக்ட்ரான் அலைகளைப் பயன்படுத்தினால் அதைப்போல் லட்சம் மடங்கு அதிகமான உருப்பெருக்கம் பெறலாமென்று தெரிகிறது.

படம் 25-ல் ஒளி நுண்ணோக்கியின் அமைப்பும் எலெக்ட்ரான் நுண்ணோக்கியின் அமைப்பும் அருகருகே காட்டப்பட்டுள்ளன. ஒளி நுண்ணோக்கியில் ஒளியானது சூரிய ஒளி போன்ற மூலம் 'L' யிலிருந்து ஒளி குவி வில்லையின் மேல் (c) விழுகிறது. பின்பு குவிக்கப்பட்ட ஒளியானது உருப்பெருக்கம் செய்யப்பட வேண்டிய ஒரு பொருளை (*x*) ஒளியூட்டம் செய்கிறது. உருப் பெருக்கம் செய்யப்பட வேண்டிய பொருளின் மூலம் சிதறப் பட்ட ஒளியானது நுண்ணோக்கியின் பொருளருகு வில்லையில் (objective) (O) விழுந்து முதலாவது உருப்பெருக்கம் அடை கிறது. பின்பு நுண்ணோக்கியின் விழி வில்லை (eye lens) (E) மூலம் இரண்டாவது உருப்பெருக்கமடைந்து முடிவில் திரையில் (S) விழுகிறது. இதே போல் எலெக்ட்ரான் நுண்ணோக்கியில் டங்ஸ்டன் இழையிலிருந்து வெளிப்பட்ட எலெக்ட்ரான்கள் அதிக மின்னழுத்தத்தால் முடுக்கம் செய்யப் பட்டு, பின்பு காந்த வில்லையின் (M.c) மூலம் குவிக்கப்பட்டு, உருப்பெருக்கமடையும் பொருளின் (*x*) மேல் விழுகிறது. பின்பு இப் பொருளின் மூலம் சிதறப்பட்ட எலெக்ட்ரான் கதிர்கள், எலெக்ட்ரான் நுண்ணோக்கியின் காந்த பொருளருகு வில்லையால் (M.O) முதலாவது உருப்பெருக்கமடைகின்றன. பின்பு இவை காந்த விழி வில்லை (M.E) யின் மூலம் இரண்டாவது உருப் பெருக்கமடைந்து முடிவில் திரை (S) யில் விழுகிறது. எலெக்ட்ரான் நுண்ணோக்கியின் உட்புறம் வெற்றிடமாயிருக்க வேண்டும். இல்லையென்றால் காற்றின் மூலக் கூறுகளுடன் எலெக்ட்ரான்கள் மோதுண்டு சிதறிவிடும்.



படம் 25. ஒளி நுண்ணோக்கியும் எலெக்ட்ரான் நுண்ணோக்கியும்

4.3. குவான்டம் விசையியலின் பிறப்பு

பிளாங்ஸ், ஐன்ஸ்டைன் மற்றும் போர் இவர்களால் உருவாக்கப்பட்ட முதுபழங் குவான்டம் கொள்கையைக் கொண்டு (classical quantum theory), ஹைட்ரஜன், ஹைட்ரஜனைப் போன்ற அணுக்களின் நிறமாலையின் தொடரை (spectral series) விவரித்துக் கூறமுடியும். ஆனால் இரண்டு எலெக்ட்ரான்களுக்கு மேற்பட்ட அணுக்களின் நிறமாலையை விவரிக்க முடியவில்லை. மேலும் சில நிறமாலையின் கோடுகள் அதிகச் செறிவுள்ளதாயும், மற்றவை குறைந்த செறிவுள்ளதாயும் இருக்கக் காரணம் என்ன என்பதையும் விளக்கிக் கூற முடியவில்லை. அதிக பகுதிறன் கொண்ட கருவியைக் கொண்டு நிறமாலையின் கோடுகளை ஆராயும்போது ஒரு நிறமாலையின் கோட்டில் பல கோடுகள் நிறைந்திருக்கின்றன என்ற விஞ்ஞான ஆராய்ச்சியின் உண்மையையும் மேற்கூறிய கொள்கையைக் கொண்டு விளக்க முடியவில்லை. எனவே முதுபழங் கொள்கையின் குறைகளை அகற்றவும் தோற்றப்பாடுகளைச் சீராக

விளக்கவும் புதிய குவான்டம் விசையியல் (New Quantum Mechanics) பிறக்கலாயிற்று.

இப் புதிய குவான்டம் விசையியலில் இரு பகுதிகள் ஒன்றுக்கொன்று இணையாக வளர்ந்தன. ஒன்று இர்வின் ஷ்ராடிங்கரால் உண்டாக்கப்பட்ட அலை விசையியல் (wave mechanics) மற்றொன்று ஹெய்ஸ்சன்பர்க்கால் தோற்றுவிக்கப்பட்ட அணி விசையியல் (matrix mechanics) இவ்விரு விசையியலையும் பொதுவாகப் புதிய குவான்டம் விசையியல் (New Quantum Mechanics) என்றழைக்கலாம்.

குவான்டம் விசையியலின் தோற்றுவாயும் வளர்ச்சியும்

1925ஆம் ஆண்டிலே வெர்னர் ஹெய்ஸ்சன்பர்க் என்பார் (Werner Heisenberg) ஒரு விசையியல் தொகுதியினை படைத்தார். இதுவே பின்னர் அணி விசையியல் (matrix mechanics) என்று வழங்கலாயிற்று. இவ்விசையியலில் முதுபழங் கொள்கை விசையியலின் பழமைக் கருத்துக்கள் யாவும் புரட்சிகரமான முறையில் மாற்றியமைக்கப்பட்டன. இவர் அணு இயல் கோட்பாட்டிலே (atomic theory) கண்டறியக்கூடிய கணியங்களுக்கு (observable quantities) மிக முக்கியத்துவம் கொடுக்க வேண்டும் என்று வலியுறுத்தினார். இவர் எடுத்துக்காட்டாக இரண்டு கணியங்களை (i) நிறமாலைக் கோடுகளின் அதிர்வெண்கள் மற்றும், (ii) நிறமாலைக் கோடுகளின் செறிவுகள் (intensities) ஆகியவற்றை கண்டறியக்கூடிய கணியங்களாகக் கொண்டு இவற்றிற்கு மூக்கியத்துவம் கொடுத்தார். எலெக்ட்ரானின் சுற்றுவட்டப் பாதை (electronic or bit) போன்ற நேரடியாகக் கண்டறிய முடியாதவற்றிற்கு இவர் தமது கொள்கையில் முக்கியத்துவம் கொடுக்கவில்லை.

இப் புதிய கோட்பாட்டினை ஹெய்ஸ்சன்பர்க், பார்ன் (Born) மற்றும் ஜார்டான் (Jordon) என்பவர்கள் அணி இயல் கணிதத்தின் அடிப்படையில் அமைத்து வளர்த்தனர். இக் கோட்பாட்டை "கண்டறியக்கூடிய கணியங்கள் பற்றிய நுண் கணிதம்" (Calculus of observable quantities) என்றழைப்பது சாலப் பொருந்தும். இக் கோட்பாட்டினைக் கொண்டு நிறமாலைக் கோடுகளின் அதிர்வெண்கள் மற்றும் செறிவுகள் ஆகியவற்றைத் தெளிவாகக் கணக்கிட்டறிந்து விளக்க இயலும். பிரச்சனையில் உள்ள கணிதவியல் சிக்கலுக்குத் தீர்வு கண்டபின் மேற்கூறிய செயல் மிக எளிதாகிவிடும்.

1926ஆம் ஆண்டிலே அணிவிசையியல் வளர்ச்சிக்கு (Development of matrix mechanics) ஒப்பான மற்றொரு விசையியலும் (mechanics) இன்னொரு திசையிலே ஷ்ராடிங்கர் என்பவரால் உருவாக்கப்பட்டு வளர்ந்து வந்தது. லூயிஸ் டிப்ராய்ல் (Louis de Broglie) என்பார் பொருளுக்கான அலைக் கோட்பாட்டினைப் படைத்தார். இக் கொள்கையால் ஷ்ராடிங்கர் மிகவும் கவரப்பட்டு ஒரு புதிய விசையியலை உருவாக்கி வளர்த்தார். இவர் பொருள் அலைகளுக்கான (matter waves) இயக்கச் சமன்பாட்டினை (equation of motion) படைத்தார். இவர் முதுபழங் கொள்கையில் கண்ட இயக்க விசையியல் மாறிகளுக்கு (dynamical variables) மாற்றாக கணிதவியல் ஆபரேட்டர்களைப் (operators) பயன்படுத்தினர். இவற்றை மிக எளிதில் கையாளலாம். ஆனால் அணி விசையியல் போன்று அவ்வளவு கடினமானதன்று. எனவே ஷ்ராடிங்கரின் விசையியல் நடைமுறையில் வெகு அதிகமாகப் பயன்படுத்தப்பட்டது என்று கூறலாம்.

ஷ்ராடிங்கர் வெகு விரைவிலேயே தமது அலை விசையியலும் ஹெய்ஸ்சன்பர்க்கின் அணி விசையியலும் கணிதவியல் நோக்கின்படி ஒன்றே! மேலும் ஒரே தன்மையுடைய முடிவுகளையே தருகின்றன என்று நிரூபணம் செய்தார். இதனை விளக்க ஓர் எடுத்துக்காட்டைப் பயன்படுத்துவோம்.

நாட்டில் பல மதங்கள் உள்ளன. அவற்றில் ஏதாவது இரண்டு மதங்களை எடுத்துக் கொள்வோம். இந்து மதம் மற்றும் இஸ்லாம் மதம் என்பனவற்றைப் பார்ப்போம். இவைகள் அடிப்படையிலே இரு வேறுபட்ட சமயக் கருத்துக்களைக் கூறுகின்றன. இரு வேறுபட்ட நல்லொழுக்கம் இன்னும் பிறவற்றையும் இயம்புகின்றன. ஆனால் இவற்றின் இறுதி முடிவாக, முக்கியமான நோக்காக அமைவது யாதெனின் கடவுளை அடைதல் அல்லது முக்தி பெறல் என்று சொல்லலாம். இரு வேறு வழிகளில் சென்று இறுதியில் ஒரேயிடத்தை அடைவது போன்று உள்ளது தெளிவாகும். இறுதியில் ஈஸ்வரனும் அல்லாவும் ஒருவரே என்பது பெறப்படுகிறது.

இது போன்று இரண்டு விசையியலும் வேறுபட்டுக் காட்சியளித்தாலும் இறுதியில் அவையிரண்டும் ஒரே மாதிரியான உண்மையையே தெளிவுபடுத்திக் காட்டுகின்றன என்பது தெளிவாகிறது.

ஆனால் தொடக்க காலத்திலே புதிய கொள்கையின் இயல்பான பொருள் தெளிவாக விளங்கவில்லை. தொடக்க காலச் சிக்கல்கள் சில இருந்தன. ஷ்ராடிங்கர் முதன் முதலில் டிப்ராய்ல் அலைகளை இயல்பியல் பொருளாக அதாவது எலெக்ட்ரான் ஆக எண்ணினார். ஆனால் இத் துகளை ஓர் அலையாகவே எண்ண வேண்டியுள்ளது. எனவே இக் கருத்தினால் சில இடையூறுகள் எழுந்தன. இரு ஊடகங்களுக்கிடைப்பட்ட எல்லையிலே ஓர் அலையின் ஒரு பகுதி எதிரொளிக்கப்படுகின்றது. மறுபகுதி செலுத்துகைக்கு (transmission) உட்படுகிறது. இவ்வலையை ஓர் எலெக்ட்ரான் துகளாக எண்ணினால், ஒரு துகளை இரு பகுதிகளாகப் பிரிந்து மேற்கூறிய செயல்களைச் செய்ய வேண்டும். துகளின் ஒரு பிரித்த பகுதி செலுத்துகைக்கும், மறுபகுதி எதிரொளிப்புக்கும் உட்பட வேண்டும். இதை நாம் கற்பனை செய்யவும் இயலாது. எனவே துகளை அலைகளாகக் கண்டால் இத் தோற்றப்பாட்டினை விளக்கலாம். மேக்ஸ் பார்ன் (Max Born) என்பார் இச் சிக்கலைத் தீர்த்து வைத்து ஒரு புதிய விளக்கத்தைக் கொடுத்தார்.

பார்ன், டிப்ராய்ல் அலைகளுக்கு புள்ளியியலுக்குரிய ஒரு புதிய விளக்கத்தைக் கொடுத்து (statistical interpretation) இச் சிக்கலைத் தவிர்த்தார். இவ்விளக்கம் இன்றளவும் சிறந்தது, செம்மையானது என்று எண்ணி நடைமுறையில் எல்லோராலும் ஏற்றுக் கொள்ளப்பட்டிருக்கிறது. இன்றும் நாம் இதனைச் சிறப்பாகப் பயன்படுத்துகிறோம்.

புள்ளியியலுக்குரிய விளக்கத்தின் (statistical interpretation) பயனாக விஞ்ஞான சிந்தனையோட்டத்தில் ஒரு புதிய புரட்சி ஏற்பட்டுள்ளது என்று கூறலாம். இவ் விளக்கம் முதுபழங் கொள்கையின் உறுதியான கோட்பாட்டினை மாற்றி, நிகழ்தகவு கோட்பாடாக (probabilistic theory) அமைந்துள்ளது. இக் கோட்பாடு இத் தனித் தன்மையோடு ஒரு பொதுவான (general) ஓரியல் தொகுதி (coherent system) விசையியலாக (mechanics) வளர்ந்து வருகிறது. இதற்கு இப்போது புதிய குவான்டம் விசையியல் (New Quantum Mechanics) என்று பெயரிடப் பட்டுள்ளது இப் புதிய விசையியலுக்கு டிராக் (P. A M. Dirac), ஜார்டான் (Jordon), ஹெய்ஸ்சன்பர்க் (Heisenberg), மற்றும் பௌலி (Pauli) ஆகியோர் சிறந்த முயற்சியோடு சேவை செய்து வருகின்றனர். இவர்களின் முயற்சியாலும் சேவையாலும் இவ் விசையியல் வளர்ந்தும் மேம்பட்டும் வருகிறது.

இயல்பியல் துறையின் (physics) பல பதிவுகளில் இப் புதிய விசையியல் ஒரு புதிய மறுமலர்ச்சியை உண்டுபண்ணியுள்ளது. இயல்பியலின் எல்லாப் பிரிவுகளிலும் குவான்டம் விசையியல் பயன்படாத ஒரு நிலையே இல்லையென்று சொல்லலாம். நடைமுறைப் பயன்களில் இவ் விசையியலின் சேவை நாளுக்கு நாள் பெருகி வருகிறது. புதிய பிரச்சனைகளுக்குத் தீர்வு காண்பதில் இக் குவான்டம் விசையியல் வெற்றி வாகை சூடி வருகிறது.

நமது இந் நூல் குவான்டம் கொள்கை பற்றிய அடிப்படை அறிவைப் பெறுவதாக அமைக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே ஓர் எல்லைக்குட்பட்ட அறிவினை இந் நூல் வழியாகப் பெறலாம்.

இப்போது அலை விசையியலையும் (wave mechanics), மற்றும் அணி விசையியல் (matrix mechanics) பற்றியும் சற்று விளக்கமாகக் காண்போம்.

பயிற்சி

(1) குவான்டம் விசையியலின் தேவையையும், அவசியத்தையும் தக்க சான்றுகளுடன் விவாதிக்க.

(2) டிப்ராய்லியின் பொருள் அலையின் அலை நீளத்திற்கான சமன்பாடு ஒன்றைக் காண்க. பொருளுக்கும் அலைப் பண்புள்ளது என்பதை நிரூபிக்கும் பரிசோதனை ஒன்றை விவரி.

5. அலை விசையியல்

(Wave Mechanics)

5: 1. கணிதவியல் அடித்தளம்

அலை விசையியலின் அடிப்படை எடுகோள்களைக் காண்பதற்கு முன் சில கணிதவியல் கோட்பாடுகளையும் அறிந்திருப்பது நலமாக அமையும். நாம் அலை விசையியலில் பல ஆபரேட்டர்களை அல்லது செயலிகளைப் (operators) பயன்படுத்துகிறோம். எனவே, ஆபரேட்டர்களின் தன்மைகள், வகைகள், பரிமாற்றிகள் (commutators), ஐகன் சார்பலன் மற்றும் மதிப்பு (Eigen function and value) நார்மலாக்கப்பட்ட மற்றும் செங்குத்தான அலைச் சார்பலன்களின் தன்மைகள், அலைத் திசை வேகம் மற்றும் தொகுப்பு வேகம், மற்றும் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு (expectation value) போன்றவற்றைப் பற்றிய அறிவு தெளிவாக இருப்பது நலமாகும். எனவே இவற்றைப் பற்றி இங்கு காண்போம். நாம் மேலும் பொருள் அலைகளைப் பற்றி விரிவாகவும், ஆழமாகவும் காண உள்ளோம். பொருள் அலைகளை ψ என்ற குறியால் குறிப்பிடுகிறோம். இதனை அலைச் சார்பலன் அல்லது அலை அணிக் கோவை என்றும் அழைக்கலாம்.

ஆபரேட்டர் (Operator)

குவான்டம் விசையியலில் ஆபரேட்டர்கள் சிறப்பான வகையில் பயன்படுகின்றன. மேலும் இவை முக்கிய பங்கேற்றுள்ளன. ஆபரேட்டர் பற்றிய தெளிவு இருப்பது மிகவும் இன்றியமையாததாகும். ஷ்ராடிங்கர் அலை விசையியலில் குறிப்பாக 'வகையீட்டு ஆபரேட்டர்கள்' (Differential operator) பெரும்பான்மையாகப் பயன்படுகின்றன.

ஆபரேட்டர் (Operator): ஆபரேட்டர் என்பது சில விதிகளைக் (rule) கடைப்பிடிக்கும் இதனைப் பயன்படுத்தி ஒரு சார்பலனில் இருந்து மற்றொன்றைக் கண்டு கொள்ளலாம்.

S என்பதை ஒரு வகையீட்டு ஆபரேட்டராகக் (differertial, operator) கொண்டு $f(x)$ என்ற ஆபரேண்ட் மீது செய்கை புரிந்தால்,

$$S\,f(x) = f'(x) \qquad \ldots(1)$$

$'(x)$ என்ற மற்ளுெரு சார்பலனை அடைகிறோம்.

நேரியல் ஆபரேட்டர் (Linear Operator):

எடுத்துக்காட்டாக யாதாமொரு (arbitrary) ஆபரேண்ட்களை, u மற்றும் v ஆகியவற்றை எடுத்துக் கொள்வோம். இவற்றின்மீது α என்ற ஆபரேட்டர் செய்கை புரிகிறது.

$$\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v \qquad \ldots(2)$$

இவ்வாறு அமைந்தால் α ஒரு நேரியல் ஆபரேட்டராகும். யாதாமொரு மாறிலி (arbitrary constant)ஐ எடுத்துக் கொண்டு ஆபரேட்டரைப் பயன்படுத்துவோம்.

$$\alpha c = c\,\alpha \qquad \ldots(3)$$

இவ்வாறு நேரியல் ஆபரேட்டர் செய்கை புரியும்.

பலவிதமான கணிதவியல் செய்கைகள் (mathematical operations) உள்ளன. இவை யாவும் $u(x)$ சார்பலன்மீது செயல்புரிவதாகக் கொள்வோம். கணிதவியல் செய்கைகளில் (i) $u(x)$ என்ற சார்பலனை x-யின் அடிப்படையில் வகையிடல் (differentiation).

(ii) $u(x)$ஐ x-ஆல் பெருக்குதல்—மற்றும்

(iii) $u(x)$ஐ c என்ற மாறிலியால் (constant) பெருக்குதல். என்பன முக்கியமானவைகளாகும். அவற்றைக் கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகள் மூலம் அமைக்கலாம்.

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{d}{dx}\right] u(x) &= u'(x) \\ [x]\; u(x) &= x\,u(x) \\ [c]\; u(x) &= c\,u(x) \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(4)$$

இரு செய்கைகள் (operations) $u(x)$-யின் மீது நிகழ்வதாகக் கொள்வோம். முதல் செய்கை α என்ற ஆபரேட்டர் மூலமும் இரண்டாம் செய்கை β என்ற ஆபரேட்டர் மூலமும் நிகழ்வதாகக் கொள்வோம். பின்னர் அவை இரண்டும் கூட்டப்படுகின்றன. முடிவை $\alpha u + \beta u = (\alpha+\beta)u$ என அழைக்கலாம். மேலும்

கோவை $\frac{d}{dx} \quad u(x) + x\, u(x)$

என்பதனை $\left[\frac{d}{dx} + x\right] u$ எனவும் அமைத்து

இரு செய்கைகள் நிகழ்வதைக் குறிக்கலாம்.

பரிமாற்றிகள் (Commutators) :

ஆபரேட்டர்களின் $\alpha\beta - \beta\alpha$ என்பது α மற்றும் β என்ற இரு ஆபரேட்டர்களின் பரிமாற்றியாகும். இதனைப் பிறைக் குறியீட்டும் அமைக்கலாம் $[\alpha, \beta]$.

$$[\alpha, \beta] = \alpha\beta - \beta\alpha \quad \ldots(5)$$

பரிமாற்றி $[\alpha, \beta]$ கீழ்க்காணும் முற்றொருமைகளை (identities) நிறைவு செய்கின்றன.

$$\left.\begin{aligned} &[\alpha, \beta] = -[\beta, \alpha] \\ &[\alpha, \beta\gamma] = [\alpha, \beta]\gamma + \beta[\alpha, \gamma] \\ &[\alpha\beta, \gamma] = [\alpha, \gamma]\beta + \gamma[\beta, \alpha] \\ &[\alpha, [\beta, \gamma]] + [\beta, [\gamma, \alpha]] + [\gamma, [\alpha, \beta]] = 0 \end{aligned}\right\} \ldots(6)$$

இவற்றை வரையறை $[\alpha, \beta] = \alpha\beta - \beta\alpha$ என்பதிலிருந்து பெறலாம்.

குவாண்டம் விசையியலில் பயன்படும் சார்பலன்கள் யாவும் $u(x)$ போன்றவை. அவை மெய்யான (real) அல்லது சிக்கல் (complex) சார்பலன்களாக இருக்கலாம். அதன் தனி மதிப்பினை (absolute value) அல்லது அளவினை (magnitude) $|u|$ என்று குறிக்கலாம். ஷ்ராடிங்கர் கொள்கையில் பயன்படும் சார்பலனை அலைச் சார்பலன் அல்லது அலைக்கோவை ψ (wave function) என்று அழைப்பர்.

இச் சார்பலன் சிறப்பானதும் முக்கியமானதும் ஆகிய ஒரு தன்மையைக் கொண்டிருக்க வேண்டும். அதாவது அச் சார்பலன் நன்முறையில் செயலாற்றும் (will behaved) தன்மையைக் கொண்டிருக்க வேண்டும்.

இத்தகைய சார்பலன்கள் கீழ்க்கண்ட நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்வதாகவும் அமைந்திருக்க வேண்டும். (a) இவை தரமான எல்லை நிபந்தனைகளை (standard boundary conditions) நிறைவு செய்தல் வேண்டும். (b) இவை தரமான தொடர்ச்சி நிபந்தனைகளை (standard continuity conditions) நிறைவு செய்தல் வேண்டும்.

(c) இவை சுழிக்கு முழுதும் ஒத்ததாகாது (not dynamically zero).

(d) இவை ஒரு மதிப்புடைய (single valued) மற்றும் முடிவுள்ள (finite) சார்பலனாகவும் இருக்க வேண்டும். இவற்றின் முதல் வகைக் கெழு (first derivative) ஒரு மதிப்புக் கொண்டதாகவும் மற்றும் முடிவுள்ளதாகவும் இருத்தல் வேண்டும்.

(e) நாம் கடைபிடிக்கும் முறை "ஒப்புமை தத்துவத்தினை" ஒத்ததாக அமைய வேண்டும்.

(f) அலைச் சமன்பாடு நேரியல் சேர்ப்புடைத்ததாக இருத்தல் வேண்டும்.

$u(x)$ என்ற சார்பலன் முடிவுள்ளதாக இருப்பின் அச் சார் பலன் தரமான எல்லை நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்யும். மேலும் $u(x)$ மற்றும் $\left[\frac{d}{dx}\right] u(x)$ ஆகியவை x-ன் எல்லா மெய்யான (real) மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியாக அமையும். எனவே இவை தரமான தொடர்ச்சி நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்கின்றன. ஆனால் $e\,x$ மற்றும் $x \sin x$ போன்ற சார் பலன்கள் இத்தகைய நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்வதில்லை. ஆதலின் இவற்றை நன்முறையில் செயலாற்றும் சார்பலன்கள் (well behaved functions) என்று கூற இயலாது.

ஐகன் சார்பலன் மற்றும் ஐகன் மதிப்புகள் (Eigen Function and Eigen Values):-

$$y = \sin 5x \qquad \ldots(7)$$

என்ற சார்பலனை எடுத்துக் கொள்வோம். $\frac{d}{dx}$ என்ற ஆபரேட்டரை மேற்கூறிய சார்பலன் மீது இரு முறை செயலாற்றுவோம்.

$$\frac{dy}{dx} = 5 \cos x \qquad ...(8)$$

மேலும் $$\frac{d^2y}{dx^2} = -25 \sin 5x = -25\,y \qquad ...(9)$$

இங்கு d^2/dx^2 என்பது ஒரு ஆபரேட்டர் (operator) y என்பது ஒரு ஆபரேண்ட் (operand). ஆபரேண்ட் மீதுதான் ஆபரேட்டர் செயல்படும்.

ஒரு சிறப்பு மிக்க ஆபரேண்ட்டைத் தேர்ந்து எடுப்போம். இந்த ஆபரேண்ட் மீது ஆபரேட்டர் செயல்புரிவதாகக் கொள்வோம். செயலாற்றிய பின் முடிவில் புதிய ஒரு சார்பலன் கிடைக்கப்பெறும். இந்தச் சார்பலன் முந்திய ஆபரேண்ட்டின் மதிப்பு, ஒரு மாறிலி (constant) ஆகியவற்றின் பெருக்குத் தொகையாக அமைதல் வேண்டும். அவ்வாறு இருக்குமாயின் மேற்கூறிய மாறிலி ஓர் ஐகன் மதிப்பாக (Eigen value) அமையும். உதாரணமாக சமன்பாடு (9)-ல் "25" என்பது ஐகன் மதிப்பாக அமையும். மேலும் ஐகன் சார்பலன் (Eigen function) ஆனது ஒருமை மதிப்புடையதாகவும் (single valued) தொடர்ச்சியானதாகவும் (continuous) மற்றும் எல்லையுடையதாகவும்(finite) அமைந்திருக்க வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக ஷ்ராடிங்கர் சமன் பாட்டில்

$$\nabla^2\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(W-V)\,\psi = 0...... \qquad ...(10)$$

ψ என்ற அலைச் சார்பலன் அல்லது கோவை ஐகன் சார்பலனாகும். இவற்றின் மீது ஆபரேட்டர்கள் செயல்புரிவதாக (operate) அமைந்துள்ளன. W என்பது மொத்த ஆற்றல் ஆபரேட்டர் ஆகும். இதற்குப் பல சிறப்பியல்பு மதிப்புகள் அல்லது ஐகன் மதிப்புகள் (Eigen values) உள்ளன.

குறிப்பு : ஐகன் என்ற சொல்லிற்கான விளக்கம், ஐகன் (Eigen) என்ற இச் சொல் ஜெர்மானிய (German) மொழிச் சொல்லாகும்,—இச் சொல்லிற்கு 'சிறப்பியல்புடைய' அல்லது 'தனித் தன்மையுடைய' அல்லது 'சொந்தமான' எனப் பொருள் கொள்ளலாம்.

$$\alpha u\,\lambda = \lambda\,ui...... \qquad ...(11)$$

என்ற இச் சமன்பாட்டை எடுத்துக்கொண்டு ஐகன் சார்பலன் மற்றும் மதிப்புகளைப் பொதுவாக விளக்கலாம்.

இச் சமன்பாட்டில் λ என்பது ஒரு மாறிலி. λc என்ற ஏற்ற தொரு குறிப்பிட்ட மதிப்பை, குறிப்பாக ஒரு எண் மதிப்பை (numerical value) λf எடுத்துக்கொண்டால் நன்கு செயல் புரியும் ஆபரேண்ட் ui மேற்கூறிய சமன்பாட்டிற்கு நிறைவு (satisfy) தருவதாக அமையும். α என்பது ஒரு ஆபரேட்டர். பின்னர்,

$$\alpha\, ui = \lambda^{i}\, ui \;\ldots\ldots \qquad \ldots(12)$$

இச் சமன்பாட்டில் λ^{i} என்பது α என்ற ஆபரேட்டருக்கான ஐகன் மதிப்பு ஆகும். மேலும் ui என்பது α என்ற ஆப ரேட்டரின் ஐகன் சார்பலன் ஆகும்; α என்ற ஆபரேட்டரின் ஐகன் மதிப்பு λ^{i} மற்றும் ஐகன் சார்பலன் ui ஆகியவை ஒன்றுக் கொன்று தொடர்புடையன அல்லது சொந்தமுடையன என்பது தெளிவாகும்.

நார்மல் செய்யப்பட்ட மற்றும் செங்குத்தான அலைச் சார்பலன்கள் (Normalised and Orthogonal Wave Functions):

ஓர் அலைச் சார்பலன் ψ (wave function) நார்மலாக்கப் பட்டது என்றால் கீழ்க்கண்ட நிபந்தனையை அச் சார்பலன் நிறைவு செய்வதாக அமையும். இதனை ஒருமைக்கு நார்மல் செய்யப்பட்டுள்ளது (normalised to unity) எனவும் கூறலாம்.

$$\int \psi\psi^{*}\, dT = 1 \qquad \ldots(13)$$

இங்கு ψ^{*} என்பது ψ என்ற அலைச் சார்பலனின் சிக்கல் இணை (complex conjugate) ஆகும். மேலும் இங்கு உருவமைப்பு வெளி (configuration space) முழுவதற்குமான தொகையிடல் (integration) பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது. அலைச் சமன்பாட்டின் எந்தவொரு தீர்வினையும் (solution) நார்மல் செய்ய அதனை ஒரு ஏற்ற மாறிலியால் (constant) பெருக்குதல் (multiply) வேண்டும்.

$\psi\, n$ மற்றும் $\psi\, m$ என்பன இரண்டு வேறுபட்ட ஐகன் சார்பலன்கள் எனக் கொள்வோம். ஒரு தொகுதியின் (system) அலைச் சமன்பாட்டிற்கு இவ்விரண்டு சார்பலன்களும் தீர்வுகளாக அமைகின்றன என்று கொள்வோம். அவ்வாறு இருப்பின் இச் சார்பலன்கள் கீழ்க்கண்ட நிபந்தனையை நிறைவு செய்வதாக அமைதல் வேண்டும்.

நிபந்தனை

$$\int \psi_{n}\;\; \psi_{m}^{*} = 0 \qquad \ldots(14)$$

அல்லது

$$\int \phi_n^* \ \phi_m = 0 \qquad \ldots(15)$$

என்பதாக அமையும்.

இந் நிலையில் இவ்விரு ~~அலைச் சார்பலன்களும்~~ அல்லது கோவைகளும் (wave functions) ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான (orthogonal) அமைப்பினை அல்லது தன்மையினைக் கொண்டதாக வுள்ளன என்று கூறலாம்.

அலைத் திசை வேகமும் தொகுப்பு திசை வேகமும் (Wave Velocity and Group Velocity):

ஓர் இயங்கும் பொருள் தன்னுடன் தொடர்பு கொண்ட அலைப் பெட்டகம் அல்லது அலைத் தொகுப்புடன் உள்ளது (படம் 26) என்று தற்கோளாகக் கொண்டு உள்ளோம். அப் பொருளைக் கண்டு கொள்வதில் அத் தொகுப்பு அலைகளின் வீச்சு மாறுபாட்டைப் பயன்படுத்துகிறோம். அவற்றின் வீச்சிற்கு ஏற்ப நிகழ்தகவு அமையும். தனிப்பட்ட அலைகளின் திசை வேகமானது அலைத் தொகுப்பின் திசை வேகத்திற்கு மாறுபட்டு இருக்கும். இவ்வாறு இருக்க அலையின் திசை வேகமானது அலையின் அலை நீளத்திற்கேற்ப மாறுபட வேண்டும்.

இரண்டு அலைத் தொகுப்புகளை எடுத்துக் கொள்வோம். ஒரே வீச்சுடைய (A), dw என்ற அளவில் கோண அதிர்வு வேறுபாட்டுடனும், dk என்ற அளவில் பரப்பல் மாறிலி வேறுபாட்டுடனும் இரண்டு அலைகளைச் சேர்ப்பதாகக் கொள்வோம். இரண்டு அலைகளைக் கீழ்க் கண்டவாறு விளக்கலாம்.

$y_1 = A \cos (wt - kx)$ மற்றும்

$$y_2 = A \cos \{ (w+dw)\, t - (k+dk)\, x \} \qquad \ldots(16)$$

t என்ற கணத்தில், x என்ற புள்ளியின் தொகு பயன் பெயர்ச்சியை (resultant displacement)

$y = y_1 + y_2$ எனலாம்.

$$y = 2\ A \cos \tfrac{1}{2} \Big[(2w + dw)\, t - (2k + dk)\, x \Big] \cos \tfrac{1}{2} \Big[dwt - dkx \Big]$$

w மற்றும் k இவற்றைக் காணும்போது dw மற்றும் dk ஆகியவை மிகவும் குறைந்த மதிப்புடையன.

எனவே,

$2w + dw \approx 2w$ எனவும்

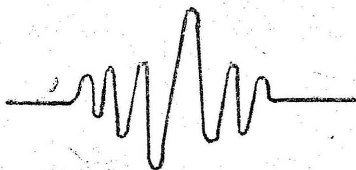
$2k + dk \approx 2k$ எனவும் கொள்ளலாம்

$$\therefore \quad y = 2A \cos(wt - kx) \cos\left(\frac{dw}{2}\,t - \frac{dk}{2}\,x\right) \quad \ldots(17)$$

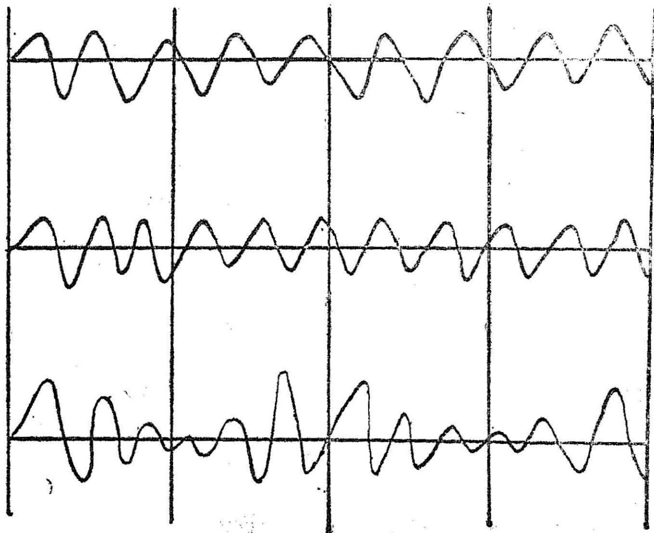
சமன்பாடு எண் (17) பற்றிய விளக்கத்தைக் கீழுள்ளவாறு கூறலாம். மேலுள்ள சமன்பாடு ஓர் அலையை விளக்குகிறது. கோண அதிர்வு 'w' மற்றும், பரப்பல் மாறிலி k உள்ள ஓர் அலையின் மீது மற்றும் ஒரு கோண அதிர்வு $\frac{dw}{2}$ மற்றும் பரப்பல் மாறிலி $\frac{dk}{2}$ உள்ள ஓர் அலையை மேற்பொருத்தி (அலைப் பண்பேற்றி) ஒரு புதிய அலையைப் பெறுகிறோம் (படம் 27).

அடுத்தடுத்த அலைத் தொகுப்புக்கள் பிறக்கின்றன. இதனை அலைப் பண்பேற்றல் (modulation) என்பர். அலையின் திசை வேகம் $w = \frac{w}{k}$ ஆகும். அலைத் தொகுப்பின் திசை வேகம் $u = \frac{dw}{dk}$ ஆகும்.

எல்லா அலை நீளங்களுக்கும் அலைத் திசை வேகம் w ஆக இருந்தால், அலைத் தொகுப்பு மற்றும் அலையின் திசை வேகமும் ஒன்றாக இருக்கும். இல்லாவிடில் வேறுபட்டு இருக்கும்,



படம் 26. அலைப் பெட்டகம் அல்லது அலைத் தொகுதி
(Wave packet or wave group)



படம் 27. அலைப் பண்பேற்றம் (Modulation–beats)

ஒரு பொருளின் நிலைப் பொருண்மை m. ஆனால் அதன் திசை வேகம் v என்றால்

$$w = 2\pi\gamma = 2\pi \frac{mc^2}{h} = \frac{2\pi m_o c^2}{h\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad ...(18)$$

$$\because \gamma = \frac{E}{h} = \frac{mc^2}{h} \quad ...(19)$$

'w'-வும், k-ம் திசை வேகம் v-ன் சார்பலன்களாகும்

∴ அலைத்திசை வேகம் $w = \frac{w}{k} = \frac{c^2}{v}$ இதன் மதிப்பு பொருளின் திசை வேகம் vயை விட அதிகமாகவும்; ஒளியின் திசை வேகம் c–ஐவிட அதிகமாகவும் உள்ளது. ∴ $v < c$.

ஓர் இயங்கும் பொருளோடு தொடர்புள்ள டிப்ராய்ல் அலைகளை எடுத்துக் கொள்வோம். அலைத் தொகுப்பின் திசை வேகம் $u = \frac{dw}{dk} = \frac{dw/dv}{dk/dv}$ ....(20)

$$\therefore \quad \frac{dw}{dv} = \frac{2\pi m_o v}{h\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad \ldots(21)$$

மற்றும் $$\frac{dk}{dv} = \frac{2\pi m_o}{h\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad \ldots(22)$$

சமன்பாடுகள்

$u=v$ என்பதைப் பெறலாம்.

எனவே இயங்கும் பொருளோடு தொடர்புள்ள டிப்ராயின் அலைத் தொகுப்பானது பொருளின் திசை வேகத்தோடு பரவுகின்றது என்பது தெளிவாகும்.

எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு (Expectation Value)

பொதுவான நோக்கில் ஒரு சார்பலனின் (function) எதிர் பார்க்கும் மதிப்பானது (expectation value) அச் சார்பலனின் பல ஏற்ற மதிப்புகளின் நிறையிட்ட சராசரி (weighted average) ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக ஒரு துகளின் வெக்டர் நிலையின் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பை (expectation value of a position vector) கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கலாம். அதாவது, துகளின் நிலையைக் குறிக்கும். இது ஒரு வெக்டர் கணியமாகும். அதன் கூறு களாக அந்தந்தக் கூறுகளின் நிறையிட்ட சராசரியும் ஆகும். தனித்த ஓர் அளவீட்டின் கணிதவியலில் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பே (mathematical expectation value) எதிர்பார்க்கும் மதிப்பாகும்.

சார்பற்ற தொகுதிகளை (independent system) எடுத்துக் கொள்வோம். அவற்றின் மீது எண்ணற்ற அளவீடுகள் எடுக்கப்பட்டுள்ளன. இம் முடிவுகளின் சராசரியே எதிர் பார்க்கும் மதிப்பு எனலாம்.

நாம் r என்ற கணியத்தின் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பை $\langle r \rangle$ என்ற குறியீட்டால் காண்பிக்கலாம்.

$$\langle r \rangle = \int r\, P(r,t)\, d\tau = \int \psi^*(r,t)\, r\, \psi(r,t)\, d\tau \qquad \ldots(23)$$

இங்கு ψ என்ற அலைச்சார்பலன் நார்மலாக்கப்பட்டுள்ளது (normalised). ψ^* என்பது ψயின் சிக்கல் இணையாகும்.

எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு, காலத்தைக் கொண்டு மட்டும் மாறுபடக்கூடிய சார்பலனாகும். ஏனெனில் ψ மற்றும் P ஆகியவை காலம் மற்றும் வெளி ஆயக் கூறுகளைக் கொண்டு மாறுபடக் கூடியன. இவற்றிற்குத் தொகைக் கணக்கிட்டு விடுகிறோம்.

இது போன்று பௌதிகப் பொருள் தரும் கணியங்களுக்கான எதிர்பார்க்கும் மதிப்புக்களையும் கணக்கிட்டறியலாம். அவை குறிப்பாக ஆயக்கூற்றின் சார்பலனாக அமைந்திருப்பது ஒரு நிபந்தனையாக அமையும்.

நிலை ஆற்றலுக்கான எதிர்பார்க்கும் மதிப்பினைக் காணுவோம்.

$$\langle V \rangle = \int V(r,t)\, P(r,t)\, d\tau$$

$$= \int \psi^*(r,t)\, V(r,t)\, \psi(r,t)\, d\tau \quad \text{------------ (24)}$$

உந்தம் மற்றும் ஆற்றல் ஆகியவற்றின் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பினைக் கணக்கிட்டுக் கண்டறியும் முன்பு அவற்றை r மற்றும் t என்பவைகளின் சார்பலனாக அமைக்க வேண்டும்.

முதுபழும் ஆற்றல் சமன்பாட்டைப் பார்த்து அது போன்றதொரு சமன்பாட்டினை அமைத்து ஆற்றலின் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பினைக் கண்டறியலாம்.

$$\langle E \rangle = \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle + \langle V \rangle \quad \text{------------ (25)}$$

இவற்றை வகையீட்டு ஆபேரட்டர்கள் (differential operators) அமைத்தால்

$$\left\langle i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \left\langle -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right\rangle + \langle V \rangle \quad \text{------------ (26)}$$

சமன்பாடு எண் (26) கிடைக்கும்.

சமன்பாடு எண் (26) ஆனது அலைச் சமன்பாட்டுடன் இசைவு கொண்டதாக அமைந்துள்ளது தெளிவாகும்.

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi \qquad ...(27)$$

ஆபரேட்டர் ψயின் மீது செய்கையாற்றும்போது ψ^* ஆனது இடப்புறத்தில் பெருக்கப்படுகிறது.

ஆதலினாலே,

$$\langle E \rangle = \int \psi^* i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} d\tau \text{ மற்றும்}$$

$$\langle P \rangle = \int \psi^* (-i\hbar) \text{ கிரேடு } \psi d\tau \qquad ...(28)$$

5. 2. எடுகோடுள்கள் (Postulates)

முதுபழங் கொள்கையின் விசையியலில் நாம் அடிப்படையாகப் பலவற்றைப் பயன்படுத்திஞேம் அவையாவன

(i) இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் (x)

(ii) பொருளின் உந்தம் (momentum)

(iii) பொருளின் மொத்த ஆற்றல் (W) முதலியன.

இவற்றை இயங்கு மாறிகள் (dynamical variables) என்று அழைத்தோம். பல நடைமுறைப் பிரச்சனைகளுக்குத் (practical problems) தீர்வுகாணும் போது மேற் கூறிய இயங்கு மாறிகளைப் பயன்படுத்தி இறுதியாக ஒரு கோவையை (expression) அடைகிறோம். தனித்தன்மை பெற்ற நிலைகளில் (specific conditions) இவற்றிக்கான மதிப்பினைப் பயன்படுத்தி இறுதியாக இக் கோணங்களுக்கான எண் மதிப்பைப் (numerical values) பெறுகிறோம்.

ஆனால் இத்தகைய இயங்கு மாறிகள் குவான்டம் அல்லது அலை விசையியலில் ஒரு நவீன பாகத்தை மேற்கொண்டு செயலாற்றுகின்றன. இயங்கு மாறிகள் அனைத்தும் ஒரு குறிப்பிட்ட சட்டங்களின் தொகுப்பிற்கு (set rules) உட்பட்டு ஆபரேட்டர்களாக (operators) மாற்றப்படுகின்றன. இந்த ஆபரேட்டர்கள் அலை அணிக் கோவை ψ-யின் மீது செயலாக்கம் செய்வதாக அமைந்துள்ளன. ஆபரேட்டருக்கு எடுத்துக்காட்டாக $\frac{d}{dx}$ ஐக் கூறலாம். இந்த ஆபரேட்டர் குறியீட்டினை (symbol) ஒரு சார்

பலனின் (function) எதிரில் அமைத்தால் ஓர் அர்த்தத்தைக் கொடுப்பதாக இருக்கும். $f(x)$ என்பது ஒரு சார்பலனுகும். இதன் முன் ஆபரேட்டரை அமைத்தால் $\frac{df(x)}{dx}$ என இருக்கும். எனவே $f(x)$ என்ற சார்பலனை ஆபரேண்ட் (operand) எனவும் $\frac{d}{dx}$ ஐ ஆபரேட்டர் எனவும் அழைக்கலாம். இந்த ஆபரேட்டர் ஆபரேண்ட்டின் மீது செயல்பட்டு அதனுள் மாற்றத்தை விளைவிக்கிறது. முன்னிருந்ததற்கு வேறுபட்ட ஒரு நிலையை $f(x)$ அடைகிறது. இத்தகைய ஆபரேட்டர்கள்தான் ஷ்ராடிங்கரின் அலை விசையியலில் எல்லா நிலைகளிலும் சிறப்பாகப் பயன் படுத்தப்படுகின்றன.

அலை விசையியலின் எடுகோள்களை எடுத்துரைக்கும்போது எளிதாக இருப்பதற்காக ஆபரேட்டருக்குப்பதிலாக ஒரு பரிமாண ஆயத் தொலைவிற்கான குறியீடாகிய x என்பதையும் காலத்திற் கான குறியீடாகிய t என்பதனையும் பயன்படுத்துவோம். ஆனல் இப்போது x மற்றும் t இரண்டும் ஓர் ஆபரேட்டர் களாகும். (x மற்றும் t ஆயத்தொலைவு மற்றும் காலத்தைக் குறிப்பன அல்ல என்பதை நினைவில் குறித்துக் கொள்ள வேண்டும்.) எளிமையாக இருத்தல் பொருட்டு எடுகோள்கள் யாவும் ஒரு பரிமாணத்திலேயே எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டுள்ளன.

எடுக்கோள் எண் 1

ஒரு உரிமைப்படி கொண்ட (one degree of freedom) ஒவ்வொரு தொகுதிக்கும் (system) ஏற்ற ஓர் அலை அணிக் கோவை (wave function) $\psi(x, t)$ இருக்கின்றது.

எடுக்கோள் எண் 2

முதுபழங் கொள்கைப்படி ஒரு தொகுதியின் (system) மொத்த ஆற்றலுக்கான கோவை,

$$\frac{Px^2}{2m} + V(x) = W \text{ — (1)}$$ என அமைக்கப்பட்டுள்ளது.

இங்கு $Px = mvx$ ஆகும். Px என்பது பொருள் அல்ல துகள் x ஆயத்தில் இயங்குகின்ற நிலையில் அதன் உந்தமாகும்(momentum). m என்பது பொருள் அல்லது துகளின் பொருண்மை மற்றும் vx என்பது x ஆயத்தில் அத்துகளின் திசை வேகமாகும். $V(x)$ என்ற குறியீடு துகளின் நிலையாற்றலைக் குறிப்பதாகும். இந் நிலை யாற்றல் x-ஐப் பொறுத்த ஒரு சார்பலனுகும்.

மேற்கூறிய சமன்பாட்டினை அலைச் சமன்பாடாக மாற்ற வேண்டும். எனவே இங்குள்ள இயக்க மாறிகளுக்கு (dynamical variables) ஒப்பான ஆபரேட்டர்களைப் பயன்படுத்த வேண்டும். இவற்றைக் கீழேயுள்ள அட்டவணையில் காணலாம்.

அட்டவணை எண் 2

வரிசை எண்	இயக்க மாறிகள் (dynamical variables) (முதுபழங் கொள்கையில்)	ஆபேரேட்டர்கள் (operators) அலை விசையியலில்
(1)	x	x
(2)	$f(x)$	$f(x)$
(3)	Px	$\frac{h}{2\pi i} \quad \frac{\partial}{\partial x}$
	Py	$\frac{h}{2\pi i} \quad \frac{\partial}{\partial y}$
	Pz	$\frac{h}{2hi} \quad \frac{\partial}{\partial z}$
(4)	W	$-\frac{h}{2\pi i} \quad \frac{\partial}{\partial t}$

சமன்பாடு (1)-ல் மேற்சொன்ன ஆபரேட்டர்களைப் பயன்படுத்தி ஆபரேண்டை $\psi(x, t)$ ஆபரேட்டர்களுக்கு முன்னால் அமைக்க வேண்டும். எனவே சமன்பாடு (1) தற்போது அலைச் சமன்பாடாக (wave equation) உருவெடுக்கிறது.

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m} \cdot \frac{\partial^2 \psi\,(x, t)}{\partial x^2} \quad V(x) + \psi\,(x, t)$$

$$= -\frac{h}{2\pi t} \quad \frac{\partial \psi\,(x, t)}{\partial t} \qquad \ldots(2)$$

இது ஒரு பரிமாணத்தில் ஒரு தொகுதிக்கான அலைச் சமன்பாடு ஆகும். நிலையாற்றல் $V(x)$ x-ஆயத் தொலைவைப் பொறுத்து அமையும். இச்சமன்பாடு ஷ்ராடிங்கரின் காலத்தைக் கொண்டுள்ள அலைச் சமன்பாடு எனப்படும்.

இவ் வெடுகோளின்படி ஆபரேட்டர்களைப் பெறலாம் என்பது தெளிவாகும்.

எடு கோள் எண் 3

சார்பலனும் (function) அதன் பகுதி வகைக் கெழுக்களும் (derivatives) அதாவது $\psi(x, t)$ மற்றும் $\frac{d\psi}{dt}(x, t)$ எல்லா யிடங்களிலும் (configuration space) தொடர்ச்சியானதாகவும் (continuous), முடிவுள்ளதாகவும் (finite) மற்றும் ஒருமை மதிப்புடையதாகவும் (single valued) [மேலும் நேரியல் நேர்ப் புடைத்ததாகவும், ஒப்புமை தத்துவத்தினைக் கடைப் பிடிப்ப தாகவும்] இருக்க வேண்டும். இங்கு x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் இந்நிலை பொருந்தும்.

சுருங்கக் கூறின் சார்பலனும் அதன் வகைக் கெழுக்களும் எல்லையில்லா நிலையில் (infinity) மறைந்து (vanish) விடுகின்றன என்பது தெளிவாகும்.

எடு கோள் எண் 4

$$\int_{-a}^{+a} \psi^*\psi \, dx = 1$$

அதவது $\psi^*\psi$ என்பது இப்போது நார்மலாக்கப்பட்டது (normalized). இச்சமன்பாட்டைத் 'தொகை வர்க்கத்தின்' (integrable square) நிறைவு தரும் சமன்பாடு எனலாம்.

எடுகோள் எண் 5

ஓர் இயங்கு மாறியின் a (dynamical variable) சராசரி மதிப் பினை a எனக்கொள்வோம். இதற்கொப்பான ஆபரேட்டரை a ஆப் எனக் குறிப்போம். இதனை அலைச்சார்பலனின் (wave function) மூலம் கீழ்க்கண்ட சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திப் பெறலாம்.

$$\bar{a} = \int_{-a}^{+a} \psi^* a_{\text{ஆப்}} \, \psi \, dx \qquad \ldots(3)$$

5.3. ஷ்ராடிங்கரின் அலைச்சமன்பாடு-பண்புகள்

(௧) 1926ஆம் ஆண்டில் ஷ்ராடிங்கர், டிப்ராய்லின் பொருள் அலைகளின் கருத்தினை அடித்தளமாக கொண்டு, ஒரு சிறந்த கணிதவியல் அடிப்படையில் கோட்பாட்டினை உருவாக்கினார். அக்கோட்பாடே அலை விசையியல் (wave mechanics) எனப்படும். m என்ற பொருண்மையுள்ள துகள் v என்ற திசை வேகத்தோடு இயங்கும்போது அத்துடன் தொடர்பு கொண்ட அலைத்தொகுதி ஒன்று பிறக்கிறது. அதன் அலை நீளம் $\lambda = \frac{h}{mv}$ என உள்ளது. இங்கு h என்பது ப்ளாங்கின் மாறிலியாகும். ஆனால் இத்தொகுதியில் அலை பிறக்க ஏதாவது ஆதாரமாக இருக்க வேண்டும். அதிர்ந்த நிலையில் உள்ள பொருள்களே அலைகளைப் படைக்கும் தன்மையுடையனவாகும். எனவே இங்கு என்ன அதிர்வு ஏற்படுகிறது? எப்படி ஏற்படுகின்றது? என்று தெரியவில்லை. நம் அறிவிற்குப் புலனாகாத நிலையில் இவ்வதிர்வும் அலைகளும் பிறப்பிக்கப்படுகின்றன. இவ்வதிர்வு அல்லது மாறும் தன்மையை ψ என்ற அலைக்கோவையில் புகுத்துவோமாயின்

$$\psi = A \sin 2\pi \left(\gamma t - \frac{x}{\lambda} \right)$$

γ என்பது அதிர்வு எண், A என்பது வீச்சு, x என்பது பெயர்ச்சி ஆகும் என அமைக்கலாம்.

$$\text{இங்கு} \quad \lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{P}$$

$$\therefore \text{ உந்தம் } = P = mv$$

$$\text{எனவே, } \psi = A \sin 2\pi \left(\frac{Wt}{h} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\because \quad W = h\gamma \quad \therefore \quad \gamma = \frac{W}{h}$$

$$\psi = A \sin 2\pi \left(\frac{Wt}{h} - \frac{Px}{h} \right)$$

$$\psi = A \sin \frac{2\pi}{h} (Wt - Px) \qquad \ldots(1)$$

மொத்த ஆற்றல் = இயக்க ஆற்றல் + நிலை ஆற்றல்

$$W = \tfrac{1}{2} mv^2 + V = \frac{P^2}{2m} + V \qquad \ldots(2)$$

இச் சமன்பாட்டினை W மற்றும் Pபோன்ற ஆபரேட்டர்களைப் பயன்படுத்தியும், தக்க மாறிலிகளைப் பயன்படுத்தியும், வகைக் கெழு சமன்பாடாக ஆபரேண்ட் ψ ஐப் பயன்படுத்தியும் அமைக்கலாம்.

$$\frac{d\psi}{dt} = a \frac{d^2\psi}{dx^2} + b V \psi \qquad ...(3)$$

சமன்பாடு (3)ஐ ஒரு பொது அலைச்சமன்பாடாகக் கொள்ளலாம். இச் சமன்பாட்டின் ஒருபுறம் $\frac{d\psi}{dt}$ என்பது cosine பகுதியை மட்டும் உடையதாக அமைந்துள்ளது. மறுபுறம் sine பகுதியாக இருப்பதையும் காணலாம் எனவே, cosine மற்றும் sine பகுதிகளின் கெழுவை (coefficients) சமப்படுத்திப் பார்க்க இயலாது.

எனவே, ψ என்ற அலைக்கோவையை cosine மற்றும் sine பகுதிகளைக் கொண்ட ஒரு தொகுதியாகக் கொள்ளலாம்.

$$\psi = A \sin \frac{2\pi}{h}(Wt - Px) + B \cos \frac{2\pi}{h}(Wt - Px) \qquad ...(4)$$

இது ஒரு ψ-க்கான பொதுவான தீர்வாகக் கொள்வோம்.

$$\frac{d\psi}{dt} = A \frac{2\pi W}{h} \cos \frac{2\pi}{h}(Wt - Px) - B \frac{2\pi W}{h} \sin \frac{2\pi}{h}(Wt - Px) \qquad ...(5)$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = - A \frac{4\pi^2 P^2}{h^2} \sin \frac{2\pi}{h}(Wt - Px) - B \frac{4\pi^2 P^2}{h^2} \cos \frac{2\pi}{h}(Wt - Px) \qquad ...(6)$$

$\frac{d\psi}{dt}$ மற்றும் $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ க்கான மதிப்புக்களைச் சமன்பாடு எண் (3)-ல் பிரதியீடு செய்து மாறிலிகள் a மற்றும் b ஆகிய வற்றின் மதிப்பினைக் கண்டறியலாம்.

$$A\ \frac{2\pi W}{h}\ \cos\ \frac{2\pi}{h}\ (Wt - Px)$$

$$-B\ \frac{2\pi W}{h}\ \sin\ \frac{2\pi}{h}\ (Wt - Px)$$

$$= a\ \Big\{ -A\ \frac{4\pi^2 P^2}{h^2}\ \sin\ \frac{2\pi}{h}\ (Wt - Px)$$

$$-B\ \frac{4\pi^2 P^2}{h^2}\ \cos\ \frac{2\pi}{h}\ (Wt - Px) \Big\}$$

$$+\ b\ V \left[A \sin\ \frac{2\pi}{h}\ (Wt - Px) + B \cos \frac{2\pi}{h} (Wt - Px) \right] \quad \ldots(7)$$

இச் சமன்பாட்டில் இரு பக்கமுள்ள cosine மற்றும் சைன் பகுதிகளின் கெழுவை (coefficients) சமமாகப் பிரித்தால்,

sine பகுதி :

$$-B\ \frac{2\pi}{h}\ W = -A\ \frac{4\pi^2 P^2}{h^2}\ a + b\ V\ A \quad \ldots(8)$$

cosine பகுதி :

$$A\ \frac{2\pi W}{h} = -B \frac{4\pi^2 P^2}{h^2}\ a + b\ V\ B \quad \ldots(9)$$

$$\therefore\ W = \frac{A}{B}\ \frac{2\pi}{h}\ P^2\ a - \frac{h}{2\pi}\ b\ V\ \frac{A}{B}$$

இதே போன்று

$$W = -\frac{B}{A}\ \frac{2\pi}{h}\ P^2\ a + \frac{h}{2\pi}\ b\ V\ \frac{B}{A} \quad \ldots(10)$$

ஆனல் $W = P^2/2m + V$ ஆகவுள்ளது.

இச் சமன்பாட்டினை, சமன்பாடு எண் (10)-துடன் ஒப்பு நோக்கினல் P^2 பகுதியைக் கீழ்க்கண்டவாறு அமைக்கலாம்.

$$\frac{1}{2m} = \frac{A}{B} \cdot\ \frac{2\pi}{w}\ a = -\ \frac{B}{A} \cdot\ \frac{2\pi}{h}\ a$$

V பகுயினை

$$-\frac{hb}{2\pi}\cdot\frac{A}{B}=1=\frac{bh}{2\pi}\cdot\frac{B}{A}$$

$$\therefore \frac{A}{B}=-\frac{B}{A} \quad \text{அதாவது} \quad \frac{A^2}{B^2}=-1$$

$$\therefore \frac{A}{B}=\pm i \qquad \ldots(11)$$

$+i$ என்பது இவ்விடத்திற்கு ஒவ்வாதது ஆகும். எனவே $-i$ ஐப் பயன்படுத்துவாம்.

$$\frac{A}{B}=-i$$

$$\frac{1}{2m}=-i.\ a\frac{2\pi}{h}$$

$$a=-\frac{h}{4\pi mi}=\frac{hi}{4\pi m}$$

$$\text{எனவே,}\ a=\frac{hi}{4\pi m}. \qquad \ldots(12)$$

$$-\frac{hb}{2\pi}\cdot\frac{A}{B}=1$$

$$\therefore b=-\frac{B}{A}\cdot\frac{2\pi}{h}=\frac{2\pi}{ih}$$

$$\text{எனவே}\ b=\frac{2\pi}{ih} \qquad \ldots(13)$$

a மற்றும் b யின் மதிப்பினைச் சமன்பாடு எண் 3-ல் பயன்படுத்துவோம்.

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=a\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+bV\phi$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=\frac{hi}{4\pi m}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{2\pi}{ih}V\phi$$

$$\therefore -\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial\phi}{\partial t}=\frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-V\phi \qquad \ldots($$

சமன்பாடு (13) காலத்தைக் கொண்டுள்ள ஒரு பரிமாணம் ஷ்ராடிங்கர் அலைச் சமன்பாடு எனப்படும்.

மூன்று பரிமாண அலைகளுக்கான சமன்பாட்டினை, சமன்பாடு எண் (14) ஐ வைத்து அமைத்து விடலாம்.

$$-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{-h^2}{8\pi^2 m}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right]+V\psi$$

$$-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\nabla^2\psi + V\psi \qquad ...(15)$$

இச் சமன்பாடு, காலத்தைத் தன்னகத்தே கொண்டுள்ள முப்பரிமாண ஷ்ராடிங்கர் அலைச் சமன்பாடு எனப்படும்.

காலத்தைக் கருத்தில் கொள்ளாத ஒரு ஷ்ராடிங்கர் சமன்பாட்டையும் நாம் அமைக்கலாம். இங்கு அலைக்கோவை ψ வெளியே (space) மாறுபடுவதாகக் கொள்ள வேண்டும். ψ ஆனது காலத்தைக் கொண்டு மாறுபாடு அடைவதில்லை.

$$\psi = e^{-\frac{2\pi i}{h}Wt}\ \psi(x, y\ z)$$

எனக் கொள்வோம்.

இங்கு ψ ஆனது வெளி (space) ஆயத் தொலைகளைப் பொருத்து வேறுபாடு அடையும்.

இங்கு ψ ஆனது காலத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டு மாறுபாடு அடைவதில்லை.

$$\psi(x, y, z, t) = e^{-\frac{2\pi i}{h}Wt}\ \psi(x, y, z) \qquad ...(16)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{2\pi i}{h}W\ e^{-\frac{2\pi i}{h}Wt}\ \psi(x, y, z)$$

இதனைச் சமன்பாடு எண் (14)-ல் பிரதியீடு செய்வோம்.

$$-\frac{hi}{2\pi}\cdot\frac{d\psi}{dt} = \frac{h^2}{8\pi^2 m}\nabla^2\psi - V\psi$$

$$\frac{hi}{2\pi}\cdot\frac{2\pi i W}{h}\ e^{-\frac{2\pi i\ Wt}{h}}\ \psi = \frac{h^2}{8\pi^2 m}\ e^{-\frac{2\pi i Wt}{h}}\nabla^2\psi - V e^{-\frac{2\pi i}{h}Wt}\psi$$

$$-W\psi = \frac{h^2}{8\pi^2 m} \quad \nabla^2\psi - V\psi$$

$$\frac{h^2}{8\pi^2 m} \quad \nabla^2\psi + (W - V)\,\psi = 0$$

அல்லது $$\nabla^2\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(W - V)\,\psi = 0 \qquad \ldots(17)$$

இது ஒரு பரிமாண ஷ்ராடிங்கர் சமன்பாடு. இது கால மாறுபாட்டைக கணக்கில் கொள்ளாதது ஆகும். இது ஒரு அடிப்படை ஷ்ராடிங்கர் சமன்பாடு ஆகும். இது வெளியின் ஆயத் தொலைகளை அடிப்படையாகக் கொண்டதாகும்.

இங்கு ஆபரேட்டர் W ஐ கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கலாம். $W = H$ மொத்த ஆற்றலை ஹேமில்டோனியன் H என்ற ஆபரேட்டராகக் கொள்ளப்பட்டுள்ளது. E என்பது W-யின் பல மதிப்புகளில் ஒரு தனித் தன்மை அல்லது சிறப்பு வாய்ந்த ஒரு மதிப்பாகும். இதனை W-யின் ஓர் ஐகன் மதிப்பு (eigen value) என்பர். எனவே $E = H$ என்பது தெளிவாகும்.

அலைக் கோவையுடன் கூடிய சமன்பாட்டை

$H\psi = E\psi$ என அமைக்கலாம்.

$$H\psi = E\psi = -\frac{h^2}{8\pi^2 m} \quad \nabla^2\psi + V\psi$$

$$\frac{h^2}{8\pi^2 m} \quad \nabla^2\psi + (E - V)\,\psi = 0$$

அல்லது $$\Delta^2\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - V)\,\psi = 0 \qquad \ldots(18)$$

இச் சமன்பாட்டில் E என்பது ஐகன் மதிப்பு (eigen value) ஆகும்.

E ஆனது ஒரு மதிப்புடையதும் (single value) தொடர்ச்சியானதும் (continuous) எல்லையுள்ள பதிப்பு (finite) கொண்டதும் ஆகும்.

சமன்பாடு எண் (18) ஆனது ஒரு சிறப்பான முறையில் அமைந்த ஒரு ஷ்ராடிங்கர் அலைச் சமன்பாடு ஆகும்.

கட்டின்மைத் துகளுக்கான (free particle) ஷ்ராடிங்கர் சமன்பாடு

கட்டின்மைத் துகளுக்கு நிலையாற்றல் $V=0$ ஆகும். துகளின் ஆற்றலானது அதன் நிலையை அல்லது இருப்பிடத்தைக் கொண்டு அமைவது இல்லை. ஆதலினால் அதன் நிலையாற்றலைச் சுழியாகக் கருதலாம்.

ஷ்ராடிங்கர் சமன்பாட்டில்

$$\nabla^2\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-V)\psi = 0 \qquad \ldots(19)$$

$V=0$ எனக் கொண்டால் நமக்குக் கட்டின்மைத் துகளுக்கான ஷ்ராடிங்கர் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

$$\nabla^2\psi + \frac{8\pi^2 m E}{h^2}\psi = 0 \qquad \ldots(20)$$

சமன்பாடு எண் (20) கட்டின்மைத் துகளுக்கான (free particle) ஷ்ராடிங்கர் அலைச் சமன்பாடு ஆகும்.

(b) ஷ்ராடிங்கரின் அலைச் சமன்பாடு

ஷ்ராடிங்கரின் அலைச் சமன்பாட்டை அமைக்கும் வழி முறையை வெகு விரிவாகப் பார்த்தோம். [5:3 (a)]. மற்றும், அச் சமன்பாட்டை, பொருள் அலைகளை அடிப்படையாகக் கொண்ட எளிய முறையில் பெறலாம். ஓர் அலையின் கட்ட திசை வேகம் (phase velocity) v_1 எனக் கொள்வோம். இவ் வலை x அச்சின் திசையினூடே பரவிச் செல்வதாகக் கொள்வோம். இதனை ஒரு சமன்பாடு மூலம் (differential equation) விவரிக்கலாம்.

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \qquad \ldots(21)$$

இங்கு ψ என்பது ஊடகத்தினூடே ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் (t) உண்டாக்கப்படும் பெயர்ச்சி (displacement) ஆகும். இத்தகைய சமன்பாடுகள் ஒலி மற்றும் மின் காந்த அலைப் பற்றிய இயல்பியல் பிரிவுகளின் அடிப்படையில் காணக் கிடைப்பன வாகும்.

நாம் பல்வேறு புள்ளிகளில் அலைக்கு ஏற்படக்கூடிய மாற்றங்களை முக்கியமாகக் கருத வேண்டியிருப்பதால்

காலத்தைப் பற்றிய முக்கியத்துவம் தேவையிராது. எனவே ψஐ அலை அணிக் கோவையாகக் கொள்ளலாம்.

$$\psi = \psi \sin 2\pi \gamma t \qquad \ldots(22)$$

இங்கு ψ-யானது அலையின் வீச்சு மற்றும் γ என்பது நிலையான அலையோடு தொடர்பு கொண்ட அதிர்வெண் ஆகும். இவ்வலையானது துகளோடு இணைந்துள்ளது என்பது இங்குக் குறிப்பிடத் தக்கதாகும். ஆதலின்,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} . \quad \sin 2\pi\gamma t$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} . \quad \sin 2\pi\gamma t$$

மற்றும் $$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = - 4\pi^2 \upsilon^2 \psi . \quad \sin 2\pi\gamma t$$

இவற்றைச் சமன்பாடு (21)-ல் பயன்படுத்தினல்

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{4\pi^2\gamma^2\psi}{v_s^2} = 0 \qquad \ldots(23)$$

ஆனல் $v = \gamma\lambda$

இப்போது நாம் அலைவிசையியல் கருத்தினைப் புகுத்துவோம்.

பொருள் அலையின் நீளம் $\lambda = \dfrac{h}{mv}$ ஆகும்

எனவே $v_1 = \dfrac{\gamma h}{mv}$

இப்பொழுது துகளின் மொத்த ஆற்றல்

= இயங்கு ஆற்றல் + நிலையாற்றல்

$W = \frac{1}{2} mv^2 + V(x)$

இங்கு நிலையாற்றல் $V(x)$ என்பது ஆயத் தொலைகளின் சார்பலனகும்.

எனவே $\frac{1}{2} mv^2 = W - V(x)$

அல்லது $mv = \sqrt{[2\{W - V(x)\} \ m]}$

ஆதலினால், $v_1 = \dfrac{\gamma h}{\sqrt{[2m\{W - V(x)\}]}}$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{4\pi\gamma^2}{h^2\gamma^2}\left[2m\{W - V(x)\}\right]\psi = 0$$

அல்லது

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left[W - V(x)\right]\psi = 0 \quad \ldots(24)$$

இதுவே ஷ்ராடிங்கரின் ஒரு பரிமாண அலைச் சமன்பாடு ஆகும். இதனை முப்பரிமாணத்திற்கு விரிவுபடுத்துவது எளிதாகும். முப்பரிமாணத்தில் இச் சமன்பாட்டைக் கீழ்க் கண்டவாறு அமைக்கலாம்.

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left[W - V(x)\right]\psi = 0 \quad \ldots(25)$$

இச் சமன்பாடு ஷ்ராடிங்கரின் முப்பரிமாண அலைச்சமன்பாடு ஆகும். இது இயக்க ஆற்றல் மற்றும் நிலையாற்றல் கொண்ட ஒரு துகளின் இயக்கத்தை விவரிப்பதாக அமையும். இச் சமன்பாடு வெளியை (space) அடிப்படையாகக் கொண்டது. இது காலத்தைப் பொறுத்தது (independent of time) அன்று. எனவே இச் சமன்பாடு புள்ளிக்குப் புள்ளி ஒளி விலகலெண் (refractive index) மாறுபடக்கூடிய ஊடகத்தினூடே பாயும் அலையை விவரிப்பதாக அமைகிறது. ψ என்பது ஆயத்தொலைகளின் மதிப்பிற்கேற்ப மாறுபாடு அடையக் கூடியது. இதனைப் பொதுவாக அலை அணிக்கோவை என்றழைப்பார்கள்.

(c) பொருள் அலைகளின் இயக்கச் சமன்பாடு (Equation of Motion of Matter Waves)

மேற்கூறிய பொருள் அலைகளின் இயக்கச் சமன்பாட்டைப் பல வழிமுறைகளில் பெறலாம். ஒரு முறையில் மேக்ஸ்வெல் (Maxwell) என்பாரின் மின்காந்த அலைச் சமன்பாட்டிற்கான தொடர்பிலிருந்து பெற இயலும். அவர் காட்டிய மின்காந்த அலைச் சமன்பாடு

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \quad ...(26)$$

இச் சமன்பாட்டில் W என்பது அலையின் வீச்சு. c என்பது மின் காந்த அலைகளின் (ஒளியின்) திசை வேகமாகும். ஃபோட்டானின் இருப்பிடத்தைக் குறிப்பிட நிகழ் திறனை (probability) இங்கு பயன்படுத்துகிறோம். எனவே ஒரு ஃபோட்டானைக்கண்டுகொள்ள அதன் நிகழ்திறனை அறிய வேண்டும். நிகழ் திறனானது, அப் பொருள் அலை வீச்சின் இருமடிக்கு ஒப்பானதாகும். ஐன்ஸ்டைனின் தொடர்புப்படி ஃபோட்டானின் ஆற்றல் E-யானது

$$E = h\gamma$$

h என்பது ப்ளாங்க்கின் மாறிலி, γ என்பது அலையின் அதிர்வு எண் ஆகும். எனவே குவான்டம் கொள்கை அடிப்படையில்

$$\therefore \text{போட்டானின் உந்தம் } P = \frac{h\gamma}{c}$$

சமன்பாடு (26)ஐ கீழ்க்கண்டவாறு மாற்றி அமைக்கலாம்.

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{P^2}{h^2 \gamma^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \quad ...(27)$$

γ என்ற அதிர்வு எண் கொண்ட பொருள் அலைகள் $\psi(x,y,z,t)$ என்ற அலை அணிக் கோவையாக (wave function) ஏற்றுக் கொள்ளப்பட்டது. எனவே சமன்பாடு (27) ஒப்பான, துகள் அலைகளின் இயக்கத்திற்கேற்ப ஒரு சமன்பாட்டினைக் காணலாம்.

அச் சமன்பாட்டினைக் கீழ்க்கண்டவாறு அமைக்கலாம்,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{P^2}{h^2 \gamma^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad ...(28)$$

இச் சமன்பாடு பொருள் அலைகளின் இயக்கத்தை விவரிப்பதாக உள்ளது.

அலை அணிக் கோவை $\psi(x, y, z, t)$ என்பதனை இரு கூறுகளின் பெருக்குத் தொகையாகவும்எண்ணலாம் அவற்றுள் ஒன்று வெளி

யைப் பொருத்தும் மற்றது காலத்தைப் பொருத்தும் மாறுபாடு அடைவன. அவற்றைக் கீழ்க்கண்டவாறு அமைக்கலாம்.

$$\psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z)\, e^{iwt}$$

இங்கு $w = 2\pi\gamma$ ஆகும்.

அலைச் சமன்பாட்டினை, காலத்தைப் கொண்டு மாறுபாடு அடையா அலை அணிக் கோவையின் $\psi(x, y, z)$ பகுதியினைக் கொண்டு கீழ்க்கண்டவாறு அமைக்கலாம்.

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{4\pi^2 P^2}{h^2}\psi = 0 \quad ...(29)$$

இங்கு ψ என்ற அலை அணிக் கோவை வெளி ஆயத்தொலைகளின் x, y, z மதிப்பைப் பொருத்து மாறுபாடு அடையும்.

ஒரு துகளின் இயக்க ஆற்றல் (T) சார்பியல் அடிப்படையின்றிக் கீழ்க் கண்டவாறு உள்ளது.

$$T = \frac{P^2}{2m}$$

இங்கு P என்பது துகளின் உந்தம் ஆகும்; m என்பது துகளின் பொருண்மையாகும். இத் துகளானது நிலைப்பண்புள்ள விசையினூடே (potential force) இருக்குமானால், இத்துகளின் மொத்த ஆற்றலின் (E) ஒரு பகுதி இயங்கு ஆற்றலாகும் (T) மறு பகுதி நிலைப் பண்பு கொண்ட ஆற்றலாகவும் V (potential energy) இருக்கும். அதாவது,

$$W = T + V$$

$$T = (W - V) = \frac{P^2}{2m}$$

அல்லது $P^2 = 2m(W - V)$ —(30)

எனவே நிலைப்பண்புள்ள விசையினூடே இயங்கும் துகளுக்கான அலைச் சமன்பாட்டினை,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(W - V)\psi = 0$$

என அமைக்கலாம். அல்லது,

$$\nabla^2 \psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (W - V) \psi = 0$$

எனவும் அமைக்கலாம். இங்கு

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$ எனக்கொள்ளலாம்.

சமன்பாடு (31) பொருள் அலைகளுக்கான ஷ்ராடிங்கரின் அலைச் சமன்பாடு எனப்படும். இச் சமன்பாடு கால மாறுபாட்டை ஒத்து வேறுபடுவதொன்றன்று. நிலைப்பண்புள்ள விசை அல்லது புலம் இல்லாத நிலையில் உள்ள துகளுக்கான அலைச் சமன்பாட்டினைப் பெற $V = 0$ எனக் கொள்ள வேண்டும். எனவே சமன்பாடு (31)ஐ,

$$\Delta^2 \psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} W \psi = 0 \quad \cdots (32)$$

என மாற்றியமைக்கலாம்.

மேற்கூறிய சமன்பாட்டிலிருந்து காலத்திற்கேற்ப மாறுபாடு அடையும் சமன்பாட்டையும் பெறலாம்.

அலை அணிக் கோவை $\psi (x, y, z, t)$ என்பதைக் கீழ்க்கண்ட வாறு அமைக்கலாம்.

$$\psi = A\, e^{i\left(\frac{Pr}{\hbar} - \frac{Wt}{\hbar}\right)}$$ இங்கு $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

$$\nabla^2 \psi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \psi$$

$$= - \frac{P^2}{\hbar^2} . \psi$$

அல்லது $- \frac{\hbar^2}{2m} . \quad \nabla^2 \psi = \left(\frac{P^2}{2m}\right) \psi$

இதே போன்று $\frac{\partial \psi}{\partial t} = - i \frac{W}{\hbar} \psi$

எனவே $i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = W \psi$

மொத்த ஆற்றல் $W = \frac{P^2}{2m} + V$

எனவே $$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\psi = W\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

அல்லது $$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \qquad \ldots(33)$$

இதுவே ஷ்ராடிங்கரின் காலத்தைச் சார்ந்த (time dependent) அலைச் சமன்பாடாகும்.

மேலும், ஆபரேட்டர் அல்லது செயலி (operator) $\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla + V\right)$ என்பதை ஹேமில்டோனியம் H (Hamiltonian) என்றழைக்கலாம். தவிர $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ என்ற ஆபரேட்டர் ψ-யின் மீது செய்கையாற்றி ஆற்றல் Wஐ தருவதாக அமைகின்றது.

சமன்பாடு எண் (33)-ல் Hஐ பதிலீடு செய்து $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ மாற்றாக Wஐ பயன்படுத்தினால்,

$$H\psi = W\psi \qquad \ldots(34)$$

என்ற எளிய சமன்பாட்டைப் பெறலாம்.

நாம் இயக்கவியல் மாறிகளை (dynamical variables) ஆபரேட்டர்களாக எண்ணியுள்ளோம்.

ஒரு குறிப்பிட்ட கண நிலைகளில் (set of situations) ஒரு ஆபரேட்டர் ஆனது ஒரு கண்டறியக்கூடிய கணியத்திற்குச் (observable quantity) சமமாகச் செயலாற்றுகிறது. குவான்டம் விசையியலில் ஆபரேட்டர்களின் இடத்தில் அதன் இயக்கவியல் கணியங்களை (dynamical quantities) எழுவது மரபு. எனவே இங்கு $\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)$ என்பதற்கு மாற்றாக H-ம், மற்றும் $\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)$—க்கு மாற்றாக W-யும் அமைந்துள்ளன. இவ்விரண்டுமே ஆற்றல் ஆபரேட்டர்களாகும் (energy operators). ஆனால் Hஆனது வெளி ஆயக்கூறுகள், (space co-ordinates) மற்றும் வகைக்கெழுக்களைச் (derivatives) சார்ந்துள்ளது. W–ஆனது கால் வகைக்கெழுத்தியைச் (time derivative) சார்ந்துள்ளது.

இறுதியாக, சார்பியல் அடிப்படையில்லாத ஒரு துகளின் இயக்கத்தை மேற்கூறிய மூன்றுவித அலைச் சமன்பாடுகள் (சமன்பாடுகளை எண்கள் (28) மற்றும் (29) மூலம் உறுதியாக விவரிக்கலாம் என்பது தெளிவாகிறது.

(d) ஷ்ராடிங்கரின் சமன்பாடு (ஆபரேட்டர் வழிமுறை)

ஷ்ராடிங்கர் சமன்பாடு ஆற்றலுக்கான தனி மதிப்பு (eigen value) கொண்ட சமன்பாடு எனலாம். அவற்றைக் கீழ்க்கண்ட வழிமுறைப் படியும் பெறலாம். H என்பது ஹேமில்டோனியன் ஆபரேட்டர். இது மொத்த ஆற்றலைக் குறிப்பிடுகிறது, எனவே

$$H\phi = W\phi \qquad \text{—(35)}$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(Px^2 + Py^2 + Pz^2\right) + V$$

உந்தங்களுக்கான ஆபரேட்டர்கள்

$$Px = \frac{h}{2\pi i}\ \frac{\partial}{\partial x};\quad Py = \frac{h}{2\pi i}\ \frac{\partial}{\partial y};$$

$$Pz = \frac{h}{2\pi i}\ \frac{\partial}{\partial z}$$

ஆகும். இவற்றைச் சமன்பாடு (35)-ல் புகுத்தி ஆபரேண்ட் ஆகிய அலை அணிக் கோவையையும் ϕ (wave function) பயன்படுத்துவோம்.

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi + V = W\phi$$

ஆனால் $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\ \nabla^2\phi + V = W\phi$$

அல்லது $\nabla^2\phi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\ (W - V) = 0 \qquad ...(36)$

இவ்வாறும் ஷ்ராடிங்கரின் சமன்பாட்டைப் பெறலாம்.

அலை அணிக் கோவையின் பண்புகள்

கீழ்க்கண்ட ஷ்ராடிங்கர் சமன்பாட்டை எடுத்துக்கொண்டு அலை அணிக் கோவையின் (wave function) பண்புகளை இங்கு விளக்கலாம்.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left[W - V(x) \right] \psi = 0 \qquad ...(37)$$

இச் சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு காணும்போது இரண்டு நிலைகளில் காண வேண்டும்.

முதல் நிலை : இங்கு $W > V$

இந்நிலையில் $\frac{8\pi^2 m}{h^2} (W - V) = 4\pi^2 k^2$

எனக் கொள்வோம். இங்கு k என்று அலை எண் (wave number) எனப்படும். அலை எண் என்பது அலை நீளத்தின் தலைகீழ்ப் பின்னமாகும் (reciprocal). எனவே சமன்பாடு (37)ஐ மாற்றியமைக்கலாம்.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 4\pi^2 k^2 \psi = 0$$

இச் சமன்பாட்டிற்கான தீர்வை

$$\psi_1 = e \pm i.\ 2\pi\ (\gamma t - kx) \qquad ...(38)$$

எனக் கொள்ளலாம். இச் சமன்பாடு (38) ஒரு முன்னேறும் இயக்கத்தை (progressive motion) விவரிப்பதாக உள்ளது.

இரண்டாம் நிலை

இங்கு $W < V$ எனக் கொள்வோம். இந்நிலையானது முதுபழங் கொள்கையில் நாம் எண்ணிப் பார்க்க இயலாத நிலையாக அமையும். இது ஒரு எதிராற்றல நிலையை (negative energy state) விவரிக்கிறது. எதிராற்றல் என்பது முதுபழங் கொள்கையில் இல்லாத ஒரு கருத்து ஆகும். ஆனால் அலைவிசையியல்படி இக்கருத்து உண்டு என்று விவரிக்கப்பட்டு நிருபணமும் கிட்டியுள்ளது. எனவே, சமன்பாடு (37)ஐ இதற்கேற்ப,

$\frac{8\pi^2 m}{h^2}(V-W) = a^2$ எனக் கொண்டு இதற்

தீர்வை ψ_2 எனக்கொள்வோம்.

$$\psi_2 = e^{\pm ax} . e^{\pm i 2\pi \gamma t} \qquad \ldots(39)$$

இது ஒரு நிலையான அதிர்வினைப் (stationary vibration) படம் பிடித்துக் காட்டுவதாக உள்ளது. இந்நிலை அதிர்வின் வீச்சானது அடுக்குக்குறி அடிப்படையிலே (exponentially) தூரத்திற்கேற்ப மாறுபாடு அடையும். இங்குதான் புழல் விளைவிற்கான (tunnel effect) அடிப்படையைப் பெறுகிறோம். இவ்விளைவின்படி துகள்கள் மின்னழுத்த அரண்களின் (potential barriers) ஊடே பாய்வன என்னும் கருத்தினைப் பெறுவோம். ஆற்றல் கொண்ட துகளும், எக்காலத்தும், மின்னழுத்த அரண்களினூடே பாய இயலாது என்ற கருத்தை ஆணித்தரமாகப் பேசுகின்றது.

ψ என்பது அதற்கான தனி, பௌதிக நேரடி விளக்கமில்லாதது. ஆனால் மேக்ஸ்பார்ன் கருத்துப்படி ஒரு புள்ளியில் $\left(|\psi|^2\right)^2$ அலை வீச்சின் இரு மடியானது அப் புள்ளியில் அத் துகளைக் காண்பதற்கான நிகழ் தகவிற்கு (probability) நேர் விகிதத்தில் உள்ளது என்பது தெளிவாகும், எடுத்துக்காட்டாக, $|\psi(x)|^2 dx$ என்பது துகளின் நிகழ்தகவு (Probability) ஆகும். இத் துகள் x ஆயத்தில் x மற்றும் $x+dx$ என்ற எல்லைக்குட்பட்டு இருந்தாக வேண்டும் என்ற கருத்து தெளிவாகிறது, இத்தகைய ψக்கான விளக்கம் அறிவியல் உலகத்தால் ஒத்துக் கொள்ளப் பட்ட உண்மையாகும். இதனோடு பல நிபந்தனைகளையும் இணைத்துள்ளனர். அவற்றுள் ஒன்று அலைச் சார்பலன் (normalisation of the wave function or normalisation condition) 'நிர்மலமாக்கப்படுதல்' அல்லது 'நார்மலாக்கப்படு் நிபந்தனை' எனப்படும்.

இந் நிபந்தனையின்படி

$$\int_{\text{முழுவெளி}} |\psi|^2 dT = \int_{\text{முழுவெளி}} \psi\psi^* \, dT \qquad \ldots(40)$$

ψ^* என்பது ψயின் சிக்கல் இணையாகும் (complex conjugate) ψ^* ஐ ψயுடன் உள்ள $-i$ எல்லாவற்றையும் $+i$ ஆக மாற்றி எளிதாகப் பெற்றுவிடலாம்.

அலை அணிக் கோவை ஒரு விளக்கம்

டிப்ராய்ல் அலைகள் அல்லது பொருள் அலைகள் தனித் தன்மையுடையன. அவ்வலைகளில் மாறுபடும் கூறாக இருப்பது அலை அணிக் கோவையாகும் (wave function). இவ்வலை அணிக் கோவை ψ என்னும் கிரேக்க எழுத்தால் (psi) அழைக்கப்படுகின்றது. இயங்கும் பொருள்களோடு இவ்வணிக் கோவை தொடர்புடைத்ததாகும். ஒரு பொருள் வெளியிலே ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியிலே (x, y, z) ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் 't' இருக்கலாம் அல்லது இல்லாமலும் இருக்கலாம் என்பது இவ்வலை அணிக் கோவையின் மதிப்பைப் பொருத்து அமைவதாகும். எனவே, ψ என்பதற்கு நேரடியாக பௌதிக அல்லது இயல்பியல் முக்கியத்துவம் ஏதும் இல்லை என்று கூறலாம். ψ-க்கு பரிசோதனை மூலம் விளக்கம் ஏதும் தர இயலாது. இதற்கு ஒரு சிறிய காரணமும் உண்டு. ஏதாவது ஒரு பொருள் எங்காவது ஓரிடத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் உள்ளதா என்று கண்டறிய நிகழ்தகவினை (probability) P ஐப் பயன்படுத்துகிறோம், இதன் மதிப்பு இரு எல்லைகளுக்கு உட்பட்டதாக அமையும். நிகழ்தகவின் மதிப்பு சுழியாக இருந்தால் அப்பொருள் உறுதியாக அங்கு இல்லையென்பது பெறப்படும். நிகழ் தகவின் மதிப்பு ஒன்று என இருந்தால் அப்பொருள் உறுதியாக அவ்விடத்தில் உள்ளது என்பது பெறப்படும். நிகழ்தகவு 0·2 ஆக இருந்தால் 20 விழுக்காடு அப் பொருள் அங்கு உள்ளது உறுதியாகும். ஆனால் எந்த ஓர் அலைக்கும் வீச்சானது நேர் மதிப்பையும் (+ve) எதிர் மதிப்பையும் (—ve) கொண்டதாக இருக்கலாம். ஆனால் நிகழ்தகவு எதிர் மதிப்புடையது என்று கூறுவது அர்த்தமற்றதாகும். எனவே, ψ ஆனது கண்டறியக்கூடியதோ அல்லது காட்சிப் பதிவு செய்யக்கூடியதோ அன்று. இதனால் இதனைப் பரிசோதனை மூலம் கண்டறியவோ அல்லது விளக்கம் தரவோ இயலாது என்பது தெளிவாகும்.

ψயின் மதிப்பு எதிராக (—ve) ஆக இருத்தல் அர்த்தமற்றது எனக் கண்டோம். இதற்கு மாற்றாக ψ^2ஐ எடுத்துக்கொண்டால் மேற்கூறிய இடையூறு நீங்கிவிடும் எனவே அலை அணிக் கோவையின் வர்க்கத்தைப் பயன்படுத்துவோம். இதனால்தான் ψ^2ஐ நிகழ்தகவு அடர்த்தி (probability density) என்றழைப்பர். எனவே. ஒரு பொருள் ψ அலை அணிக் கோவையால் விவரிக்கப்படுகிறது எனக் கொள்வோம். சோதனை அடிப்படையில் அத்துகளை அல்லது பொருளை ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் (x, y, z) ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் நிகழ்தகவு பயன்படும். இதன் மதிப்பு அக் கணத்தில் 't' ψ-ன் வர்க்கத்திற்கு (ψ^2) நேர் விகிதத்தில்

அமையும். ψ^2 ஆனது நிறை மதிப்புடையதாக இருந்தால் அப் பொருளை மிக உறுதியாக அவ்விடத்தில் காணலாம் என்பது தெளிவாகும். ψ^2 ஆனது குறை மதிப்புடையதாக இருந்தால் அப் பொருள் அவ்விடத்தில் அவ்வளவு எளிதாக இருக்கும் என்று நம்ப இயலாது. ψ^2 ஆனது சுழியாக இருக்குமானுல் உறுதியாக அப் பொருள் அல்லது துகள் அவ்விடத்தில் இல்லை யென்று இயம்பலாம். இதற்கு மாருக ψ^2 சுழிக்கு மேலாக ஒரு மதிப்பைப் பெற்றிருந்தால் அப் பொருளை அவ்விடத்தில்குறைந்த நிகழ்தகவுடன் காணலாம் என்பது பெறப்படுகிறது. இத்தகைய விளக்கம் 1926ஆம் ஆண்டில் திரு மேக் பார்ன் (Max Born) என்பவரால் எடுத்துரைக்கப்பட்டதாகும்.

மாற்ருக ஒரு பரிசோதனையில் பல ஓரினப் பொருள்கள் பல இருப்பதாகக் கொள்வோம். அப்பொருள்கள் யாவும் ψ என்ற ஒரே அலை அணிக் கோவையால் விவரிக்கப்படுவதாகக் கொள்வோம். பொருள்களின் இயல்பான அடர்த்தி (actual density) (x, y, z) என்ற புள்ளியில் t என்ற கணத்தில் ψ^2-க்கு நேர் விகிதத்தில் அமைவதாக உள்ளது.

ஓர் இயங்கு பொருளோடு தொடர்புள்ள டிப்ராய்ல் அலைகளின் அலைநீளமானது ஒரு சூத்திரத்தின் வழியாக அலை நீளம் $= \lambda = \frac{h}{mv}$ என்று விவரிக்கப்படுகிறது. இவ்வலை நீளம் அதன் வீச்சை (ψ) நிர்ணயிப்பதாக வுள்ளது. ψ என்பது இடம் மற்றும் காலம் என்ற மாறுவனவாகிய இரண்டையும் சார்ந்துள்ளது.

சில சமயங்களில் ψ என்ற அலை அணிக் கோவை சிக்கல் (complex) தன்மையுடையதாகவும் இருக்கலாம். இதில் மெய்யான கூறும் (real part) மெய்யிலாத கற்பனையான கூறும் (imaginary part) இருக்கும் நிகழ் தகவு அடர்த்தியானது (probability density) ψ மற்றும் ψ^* பெருக்குத் தொகைக்குச் சமமாக அமையும். ψ^* என்பது ψ-யின் சிக்கல் இணையானது(complex conjugate) ஆகும். எந்த ஒரு சார்பலனுக்கும் (ψ) சிக்கல் இணையைக் கண்டு கொள்ள i, என்பதை $-i$ ஆக மாற்றியமைக்க வேண்டும். i என்ற குறியீடு $\sqrt{-1}$ என்பதைக் குறிக்கும். எனவே $\psi\psi^*$ என்பது எப்போதுமே எதிர் மதிப்பை ஏற்காது. நேர்மதிப்பு $(+ve)$ உடையதாகவே இருக்கும்.

குவான்டம் விசையியலுக்கு அடிப்படையாக அமைவது ஒரு பொருளின் தொடர்புடைய அலை அணிக்கோவை ψ ஆகும்

குவான்டம் விசையியலில் (quantum mechanics) ஒரு பொருளோடு தொடர்புடைய ψ-ஐ நாம் கண்டறிவோம். அப்பொருள் வெளிப்புற விசைகளால் தாக்கப்பட்டு ஒரு குறிப்பிட்ட வரையரையில் இயங்கும்போது, அதற்கேற்ப ψ-யின் மதிப்பினைக் கண்டு, பொருள் உள்ள இடம், காலம், அதன் ஆற்றல் போன்றவற்றைக் கண்டறியலாம்.

நாம் ψ-யின் மதிப்பைக் கணக்கிட்டு கண்டறியுமுன் ψ ஆனது சில நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்வதாக அமைதல் அவசியமாகும். ψ^2 ஆனது நிகழ்தகவு P-க்கு நேர் விகிதத்தில் உள்ளது. P என்பது ψ என்பதால் விவரிக்கப்பட்ட ஒரு பொருளுடைய நிகழ் தகவு (probability) ஆகும் ψ^2யின் வெளியில் (space) தொகை (integral) யைக் காணின் அஃது முடிவு பெற்றதாக (finite) அமைதல் வேண்டும். இதன்படி அப்பொருள் அல்லது துகள் எங்காவது இருந்தே ஆகவேண்டும் என்ற

கருத்து தெளிவாகிறது இவ்வாறின்றி $\int_{-a}^{+a} \psi^2 \, dv = 0$ என

இருந்தால் அப்பொருள் அல்லது துகள் என்ற ஒன்று இருக்கவே

இருக்காது என்பது கருத்தாகும். மேற்கூறிய $\int_{-a}^{+a} \psi^2 \, dv = a$

முடிவில்லாத மதிப்பை (infinity) பெற்றிருந்தால் அத் துகள் அல்லது பொருள் எல்லாயிடங்களிலும் எல்லாக் கணங்களிலும் நிரம்பியிருக்கும் என்று பொருள்படும். ψ^2 ஆனது எதிர் மதிப்புடையதோ (negative) அல்லது சிக்கலானதோ (complex) அல்ல. ஏனெனில் ψ-ஐ இதற்கேற்ப வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே இன்னும் ஒரு விகிதத்தில் தொகையினை (integral) விளக்கலாம். அதாவது தொகையின் மதிப்பு முடிவுள்ளதாக அமைய வேண்டும் என்று கூறலாம். அதாவது ψ என்ற அலை அணிக்கோவை ஒரு உண்மையான துகளையோ அல்லது பொருளையோ விவரிக்கிறது என்ற கருத்தைத்தான் ஏற்றுக்கொள்ள வேண்டும். இது ஒரு நிபந்தனையாக அமையும். மற்றொரு நிபந்தனையையும் கண்டு காணலாம். அதன்படி ψ ஆனது ஒரு மதிப்புடைச் சார்பலன் (single valued function) என்பதாகும். இஃது இப்படி அமையக் காரணம் நிகழ்தகவு Pயானது ஒரு குறிப்பிட்ட இடத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் ஒரே ஒரு மதிப்பைக் கொண்டதாக இருப்பதால்தான் மற்றொரு நிபந்தனைக்கும் ψ கட்டுப்பட்டாக வேண்டியுள்ளது. ψ-யினுடைய பகுதி வகைக்

கெழுக்கள் (partial derivatives) $\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi}{\partial y}$, $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ எல்லாயிடங்களிலும் தொடர்ச்சியானதாக (continuous) இருத்தல் அவசியமாகும்.

5.4. ஷ்ராடிங்கர் சமன்பாட்டின் பயன்கள்—ஒரு பரிமாணம் சில எளிய புதிர்கள் அல்லது பிரச்சனைகள் (Problems)

நாம் அணுக்கள் பற்றிய கொள்கையினைக் காண இருக்கிறோம். ஹைட்ரஜன் அணு பற்றிய குவான்டம் விசையியல் அல்லது அலை விசையியல் கொள்கையினைச் சற்று விரிவாகக் காண இருக்கிறோம். இதற்கு முன்பாக, சில எளிய அடிப்படைப் புதிர்கள் அல்லது பிரச்சனைகள் (problems) பற்றிய அறிவு தெளிவாக இருத்தல் இன்றியமையாதது.

நமது இந்த நோக்கத்திற்குக் கணிதவியல் அடிப்படை மிகவும் இன்றியமையாதது ஆகும். நாம் ஹைட்ரஜன் அணுக் கொள்கையில் சிக்கல் வாய்ந்த ஒரு ஷ்ராடிங்கர் அலைச் சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு காண வேண்டும். எனவே நாம் எளிய புதிர்களையும் பிரச்சனைகளையும் சந்தித்துத் தீர்வு கண்டு நமது திறமையையும் அறிவையும் சற்று விரிவுபடுத்திக்கொள்வது நலமாக அமையும். இத்தகைய புதிர்கள் அல்லது பிரச்சனைகள் (probiems) உண்மையான பௌதிகத் தொகுதிகளைப் பற்றியது அல்ல, ஆனால் இவை எளிதாக்கப்பட்ட அனுபவபூர்வமாகச் சாத்தியமற்ற கருத்துக்கள் (simplified abstrctions) ஆகும். ஆனால் குவான்டம் விசையியலில் இயங்கும் வழிமுறைப் பற்றித் தெள்ளத் தெளிவான அறிவினை நமக்குப் புகட்டுவதாக அமையும்.

ஷ்ராடிங்கர் அலைச் சமன்பாடு தீர்வு கண்டறிய சிறப்பாகத் துணை புரிகின்றது. எடுத்துக்காட்டாக, சில ஒரு பரிமாண பிரச்சனைகளுக்குத் (one dimensional problems) தீர்வு காணலாம். அவையாவன :

(a) பெட்டகத்தினுள் உள்ள துகள் (particle in a box)
(b) புழல் விளைவு (tunnel effect)
(c) நேரியல் அலைவியற்றி— (linear harmonic oscillator)

(a) பெட்டகத்தினுள் உள்ள துகள்

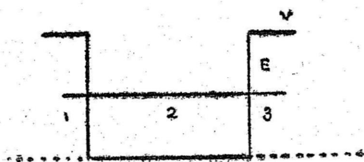
m என்ற பொருண்மை கொண்ட ஒரு துகளை எடுத்துக் கொள்வோம். இத் துகளானது x-அச்சைச் சார்ந்து மட்டுமே

இயங்கக்கூடியது. இதன் திசைவேகம் v எனக் கொள்வோம். x அச்சிலே இத் துகள் ஒரு குறிப்பிட்ட இடைவெளியில் $0 \leq x \leq a$ என்ற அளவில் இயங்கி வருவதாகக் கொள்வோம். இரு எல்லைகளில் O அல்லது a-ஐ அடைந்தவுடன் அது பிரதிபலிக்கப் பட்டு எதிர் எல்லையை அடைகிறது. மீண்டும் பிரதிபலிக்கப்பட்டு முன்பிருந்த எல்லையைச் சென்றடைந்து விடுகிறது. இவ்வாறு பன்முறை அத் துகள் பெட்டக எல்லைகளில் பிரதிபலிக்கப் படுகிறது.

இதன் நிலையாற்றல் குறிப்பிட்ட $0 \leq x \leq a$ என்ற எல்லைக்குள் சுழியாக (zero) இருக்கட்டும். பிற பகுதிகளில் நிலையாற்றல் V என்ற அளவு கொண்டதாகவும் மாறாத ஒரு மாறிலியாகவும் இருப்பதாகக் கொள்வோம். எனவே இத் துகள் பெட்டகத்தின் எல்லைக்கு அப்பால் அல்லது இப்பால் இருக்கும்போது அதாவது $x \leq O$ அல்லது $x \geq a$ என்ற நிலையில் துகளின் நிலையாற்றல் V என்ற மாறிலியாக இருக்கின்றது. (இதுவரை மொத்த ஆற்றலை W எனக் கொண்டோம்) இதற்கு மாற்றாக W-யின் ஐகன் மதிப்பாகிய E-யினையும் பயன்படுத்தலாம். ஏனெனில் E என்பது W-யின் பல மதிப்புகளில் சிறப்பியல்பு வாய்ந்த ஒரு மதிப்பாகும். எனவே இனிவரும் பிரச்சனைகளில் அல்லது புதிர்களில் (problems) Eஐ Wக்கு மாற்றாகப் பயன்படுத்துவோம். எனவே துகளின் முழு ஆற்றலை E எனக் கொள்வோம். இங்கு துகளின் அசையா நிலைப் பொருண்மையைக் கணக்கில் சேர்க்கவில்லை. மேலும் E-யின் மதிப்பு Vஐ விடக் குறைவு $(E < V)$ எனவும் கொள்வோம்.

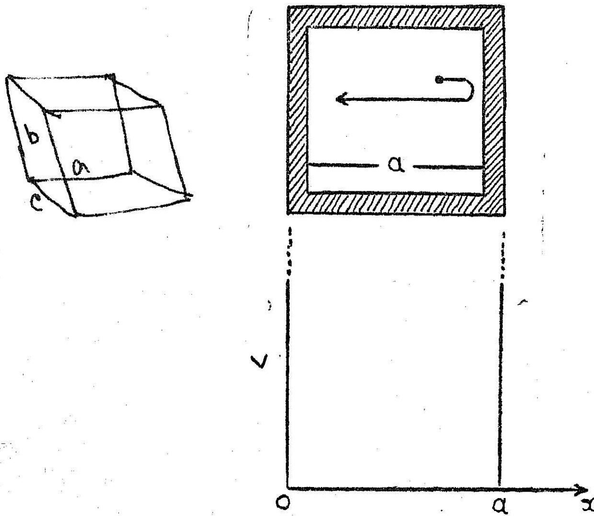
இங்கு துகளின் x அச்சைச் சார்ந்த இயக்கத்தை மட்டுமே கருத்தில் கொள்கிறோம். எனவெ அலை அணிக்கோவை வீச்சிற்கு ஏற்ற ஷ்ராடிங்கர் அலைச் சமன்பாட்டை

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{8\pi^2 m}{h^2} (V - E) \psi = 0 \qquad ...(1)$$



படம் 28. (a) ஒரு பரிமாணப் பெட்டி அல்லது பெட்டகப் பெட்டியினுள் உள்ள துகளின் ஆற்றல் E. $(E < V)$

சமன்பாடு (1) படத்தில் காட்டியபடி பகுதி 1 மற்றும் பகுதி 3 ஆகியவற்றிற்குப் பொருத்தமாகும். ஆனால் இடைப்பட்ட பகுதி 2-ல் நிலையாற்றல் சுழியாக உள்ளது ($V=0$). எனவே சமன்பாடு (1)ஐ மாற்றியமைக்க வேண்டும்.



படம் 28 (b) 'a' என்ற அகலமுள்ள ஒரு பரிமாணப் பெட்டியினுள் உள்ள துகள்.

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \quad E\psi = 0 \qquad ...(2)$$

அல்லது
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k^2 \psi = 0 \qquad ...(3)$$

மேற்கூறிய சமன்பாட்டிற்குப் பொதுவான தீர்வு உள்ளது. அத்தீர்வு.

$$\boxed{\psi\ (x) = A \sin\ k\,x + B \cos kx} \qquad ...(4)$$

என்பதாகும்.

இங்கு ψ என்ற சார்பலன் துகள் பற்றிய நிகழ் தகவுக்கு (probability) ஒப்பானதாகும். ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் உள்ளதைக் காண நிகழ்தகவு பெரிதும் பயன்படுகிறது. இந் நிலையில் நாம் எல்லை நிபந்தனைகளை (boundary conditions) நோக்குவோம்.

ψன் மதிப்பு $x=0$ மற்றும் $x=a$ என்ற புள்ளிகளில் சுழியாகும். துகள் இந்த இரு எல்லை வரம்புகளுக்குள் மட்டுமே காணப்படும். இதற்கு வெளியே செல்லாது. எனவே $x=0$ மற்றும் $x=a$ ஆக உள்ள பொழுது $\psi=0$ ஆக இருக்கும். எனவே எல்லைக்குள் நிலையான அலை (standing wave) தோன்று கிறது. இதன் அலை நீளம் $\lambda=\frac{2l}{n}$. இங்கு n என்பது முழு எண் ஆகும். எனவே $B=0$ எனவும் $x=0$ மற்றும் $\psi=0$ எனவும் கொள்ளலாம். மேலும் $\psi(a)=A\sin ka=0$ எனவும் $x=0$ மற்றும் $\psi=0$ எனவும் கொள்ளலாம். இங்கு A ஆனது சுழியாகாது. அவ்வாறு இருப்பின் நாம் ஒரு தீர்வைக் கண்டுகொள்ளவும் இயலாது. ஆதலின் $\sin k\,a=0$ எனக் கொள்ள வேண்டும்.

அல்லது $ka=n\pi$

$$\boxed{k=\frac{n\pi}{a}}$$ எனக் கொள்ளலாம்.

இங்கு n என்பது முழு எண் $n=1, 2, 3, \ldots\ldots$

மேற்கூறிய பெட்டியினுள் துகள் பிரச்சனை கணிதவியல் அடிப்படையில் நோக்கினல் எளிதான முழுவதும் அறிந்த பிரச்சனையாக உருவெடுக்கின்றது. இரு புள்ளிகளில் கட்டப் பட்ட கயிறுகள் அதிர்வு பெறும் நிலைக்கு ஒப்பான, நிலையான அலைகள் இங்கே தோன்றுகின்றன.

இப்பிரச்சனையை அலை விசையியலின் நோக்கோடு பார்த்தால் இரண்டு புதிய சிறப்புத் தன்மைகள் கிடைக்கின்றன. இச் சிறப்புகள் முதுபழங் துகள் நிலையியக் கவியல்படி கிடைக்கப் பெறுதவைகளாகும். இச் சிறப்புகள்பற்றிக் காண்போம்.

(1) துகளின் ஆற்றல் குவான்டங்களாக்கப் படல் :

நாம் முன்பு k என்பதற்கு $k=\frac{n\pi}{a}$ என்றும்

$$k^2=\frac{8\pi^2 mE}{h^2}$$ எனவும் கண்டோம்.

எனவே $$En=\frac{k^2h^2}{8\pi^2 m}=\frac{n^2\pi^2}{a^2}\cdot\frac{h^2}{8\pi^2 m}$$

அல்லது $$En=\frac{n^2h^2}{8ma^2} \qquad \ldots(5)$$

என்ற சூத்திரத்தைப் பெறுகிறோம்.

எனவே ஒரு குறிப்பிட்ட வரையறுக்கப்பட்ட வெளியில் உள்ள துகள்களோ அல்லது எலெக்ட்ரான்களோ கீழ்க் கண்டவாறு ஆற்றலைப் பெற்றிருக்கும்.

அவ்வாற்றல் தனித்தனியாகக் குவான்டப்படுத்தப்பட்ட நிலையில் (discrete, quantised values) n இன் மதிப்பிற்கு ஏற்ப ($n=1, 2, 3$......முதலியன) அமைவதாக உள்ளன. துகளின் உந்தமும் குவான்டப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. தனித்தனி ஆற்றல் மதிப்பிற்கேற்ப (En) உந்தம் (Pn) உண்டு. துகளின் உந்தத்திற் கான கோவையைக் கீழ்க்கண்டவாறு பெறலாம்.

$$En = \frac{Pn^2}{2m}$$

$$\text{அல்லது} \quad Pn = \left[2m.\ En \right]^{\frac{1}{2}} = \left[2m.\ \frac{n^2h^2}{8ma^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{nh}{2a} = \frac{n\pi}{a} \left(\frac{h}{2\pi} \right) \qquad ...(6)$$

(ii) துகள் பற்றிய நிகழ் தகவு (Probability)

முது பழங் கொள்கையின் அடிப்படையில் ஒரு துகளைக் காண நிகழ் தகவின் உதவியை நாடுகிறோம். எல்லாச் சிறு உறுப்பும் 'dx' யின் நிகழ் தகவில் ஒரே மாதிரி அமையும் என்பது தெளிவு. ஆனால் அலை விசையியல் (wave mechanics) அடிப் படையில அஃது அவ்வாறில்லை. ஒரு துகளை ஓர் குறிப்பிட்ட ஆயத் தொலைவில் (x) கண்டறிவதற்கான நிகழ்தகவு ஓர் அலைத் தன்மை கொண்ட சார்பலனாகும் (undulating function). இதன் மதிப்பு x-ன் மதிப்பைப் பொருத்தே அமையும். அலைச் சமன் பாட்டிற்குத் தகுதியுள்ள ஒரு தீர்வு மட்டுமே காண இயலும். அச் சார்பலன்களை (functions)

$$\psi_n(x) = A \sin \left[\frac{n\pi x}{a} \right] \qquad ...(7)$$

எனக் குறிப்பிடலாம். அலை அணிக் கோவையின் விளக்கத்திற் கேற்ப கீழ்க்கண்ட நிபந்தனையை அக்கோவை நிறைவுசெய்வதாக அமைதல் வேண்டும்,

$$\int_0^a | \psi_n(x) |^2\, dx = A^2 \int_0^a \sin^2 \left[\frac{n\pi x}{a} \right].\ dx = 1 \qquad ...(8)$$

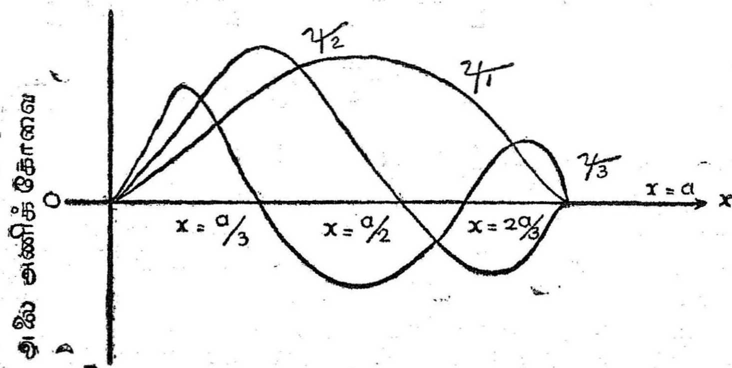
இதனை நார்மலாக்கும் நிபந்தனை (normalisation condition) என்று கூறலாம்.

$$A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}$$

ஆதலின் $$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left[\frac{n\pi x}{a}\right] \qquad ...(9)$$

இதுவே அலைச் சமன்பாட்டிற்கான பொதுவான தீர்வு ஆகும். இதில் ϕ என்பது அலைச் சார்பலனாகும்.

எடுத்துக் காட்டாக, முதல் மூன்று அலை அணிக் கோவைகள் (wave functions) வரைபடம் மூலமாகக் காட்டப்பட்டுள்ளது.



படம் 29. ஒரு பரிமாணப் பெட்டகத்தில் உள்ள துகள்-முதல் மூன்று அலைச் சார்பலன்கள்

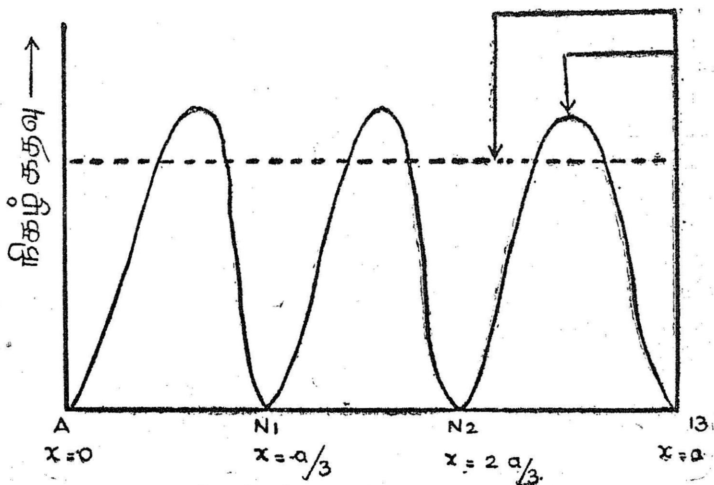
நாம் இப்போது ஒரு துகளின் குறிப்பிட்ட ஆற்றல் நிலையில் அத் துகளைக் காண்பதற்கான நிகழ் தகவினைக் கண்டறியலாம். இத்துகள் dx என்ற ஒரு சிறு உறுப்பில் ஒரு பரிமாணப் பெட்டியில் இருப்பதாகக் கொள்வோம்.

$$|\phi_1(x)|^2 dx = \frac{2}{a} \sin^2\left[\frac{n\pi x}{a}\right] dx \qquad ...(10)$$

இது ஓர் அலை போன்ற தன்மை கொண்ட சார்பலன் என்று சொல்லலாம்.

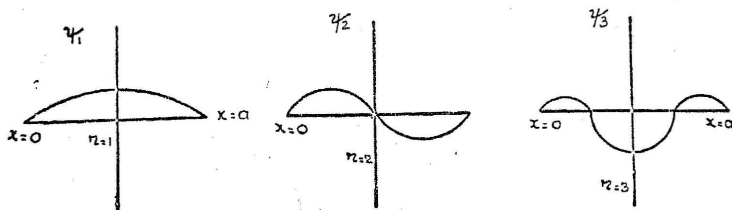
$x = \frac{a}{3}$ மற்றும் $x = \frac{2a}{3}$ ($n = 3$ மற்றும்

$E_3 = \frac{9h^2}{8ma^2}$) என்ற புள்ளிகளில் கணுக்கள் (nodes) உள்ளன. இப்புள்ளிகளில் துகள் ஒரு போதும் காணப்படுவதில்லை. இப்புள்ளிகளில் இத்துகளைக் காண்பதற்கான நிகழ்தகவு சுழியாக உள்ளது. இத்தன்மை அலைவிசையியலின் காரணமாகத் தோன்றிய சிறப்புத் தன்மை என்பதை நாம் ஏற்றுக்கொள்ள வேண்டியுள்ளது.



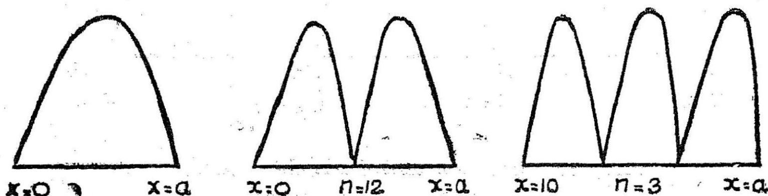
படம் 30. ஒரு பரிமாணப் பெட்டியில் துகள்.
துகளின் நிகழ்தகவுப் பங்கீடு

ஒவ்வொரு தனிப்பட்ட ஆற்றல் மதிப்பும் n இன் மதிப்பிற்கு ஏற்ப அமையும். E_n என்பது பொதுவான ஆற்றலைக் குறிப்பதாக உள்ளது. $n=1, 2, 3, \ldots$ என மதிப்பைப் பெற்றால் E_n-ன் தனித்தனியான மதிப்பை nஇன் மதிப்பிற்கேற்ப பெறலாம். இத் தனித்தனி ஆற்றலின் மதிப்புகளைச் சிறப்பியல்பு மதிப்பு அல்லது தனித் தன்மை கொண்ட மதிப்பு (eigen value or proper value) என்பர். இதற்கு ஏற்ப அமையும் அலை அணிக் கோவை (wave function) யைச் சிறப்புச் சார்பலன் அல்லது தனித்தன்மை கொண்ட சார்பலன் (eigen function or eigen value) என்று கூறுவர். நார்மலாக்கப்பட்ட அலைக் கோவை அல்லது சார்பலன்களையும் (normalised wave functions) ψ_1, ψ_2, ψ_3 மற்றும் நிகழ்தகவு அடர்த்திகளையும் (probability density) $\psi_1^2, \psi_2^2, \psi_3^2$ வரைபடம் மூலம் காணலாம்.



படம் 31. பெட்டியினுள் துகள்—அலைச் சார் பலன்கள்

இங்கு ψ_n என்ற அலைக் கோவை நேர் (+ve) மற்றும் எதிர் (—ve) மதிப்புக்களைக் கொண்டவையாகும். ஆனால் ψ_n^2 என்ற அலைக் கோவையின் வர்க்கம் (square) எப்பொழுதும் நேர் மதிப்பு புடையதாக அமையும். மேலும் ψ_n நார்மலாக்கப்பட்டுள்ளதால் (normalised) ψ_n^2 மதிப்பானது ஒரு குறிப்பிட்ட ஆயக் கூறில் (x) அத் துகளைக்கண்டுகொள்ள உதவும் நிகழ்தகவாக (probability) அமையும். எல்லா நிலைகளிலும் $x=0$ மற்றும் $x=a$ என்ற நிலைகளில் $\psi_n^2=0$ ஆக இருப்பது தெளிவாகும். எனவே துகளைப் பெட்டியின் எல்லைக்கு அப்பால் காண்பதற்கான வாய்ப்பு இல்லை என்பது பெறப்படுகிறது.



படம் 32. பெட்டியினுள் துகள் – நிகழ்தகவு அடர்த்தி

(b) புழல் விளைவு (The Tunnel Effect) அல்லது தடுப்பின்வழி ஊடுருவல் (Barrier Penetration)

இங்கு ஒரு துகளானது பல்வேறு அடுத்த நிலைகளில் (potentials) எவ்வாறு இயங்குகின்றது என்பதைக் காண்போம்.

சென்ற எடுத்துக்காட்டில், அதாவது பெட்டகத்தினுள்ளே துகள் என்ற தலைப்பில் துகளானது ஒரு கடக்க இயலாத அடுத்தத் தடுப்புக்கு (insurmountable potential barrier) உட்படுத்தப்பட்டது. இத்தடுப்பானது எல்லையில்லாத ஒன்றாகும். ஆதலினால் துகளானது பெட்டியினுள்ளேயே இருக்க வேண்டிய நிர்ப்பந்தம் ஏற்படுகிறது. துகளைப் பெட்டிக்கு வெளியே காணக் கூடிய வாய்ப்பினை அத் துகளின் நிகழ்தகவு (probability)

கொடுப்பதாக அமைந்துள்ளது. இப்பிரச்சனையில் நிகழ்தகவு பெட்டிக்கு வெளியே சுழியாகும். அதாவது துகளைப் பெட்டியை விட்டு வெளியே காண இயலாது என்பது தெளிவாகும்.

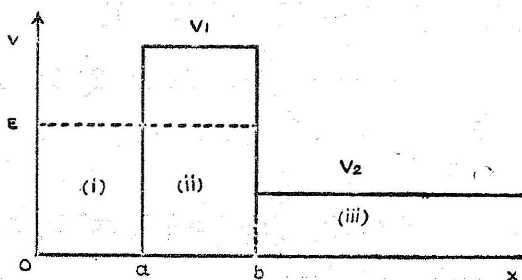
இதற்கு மாறாக அழுத்தத் தடுப்பின் உயரம் முடிவுள்ள (finite) ஒன்றாக இருப்பின், துகளைத் தடுப்பிற்கு வெளியே காணக்கூடிய ஒரு வாய்ப்பு கிடைக்கலாம். இத்துகளைத் தடுப்புக்கு வெளியே காணக்கூடிய வாய்ப்பினைத் துகளின் முடிவுள்ள நிகழ்தகவு (finite probability) தருவதாக அமையும். இப்பிரச்சனையைச் சற்று விளக்கமாக ஈண்டு காணலாம்.

ஒரு பரிமாணத்தில் E என்ற ஆற்றலைக் கொண்ட ஒரு துகள் அழுத்தப் புலனில் (potential field) இயங்குவதாகக் கொள்வோம். அழுத்தப் புலம்கள் படத்தில் காட்டியபடி மூன்று வகைகளாக உள்ளன. மூன்று புலம்களையும் கீழ்க் கண்டவாறு வரையறுக்கலாம்.

(i) $V = 0;\ [x < a]$

(ii) $V = V_1;\ [a < x < b]$

(iii) $V = V_2;\ [x > b]$ இங்கு $V_2 < E < V_1$



படம் 33. மூன்று வேறுபட்ட அழுத்தப் புலம்கள்

துகளின் பொருண்மை m எனக் கொள்வோம். இதன் இயக்கம் x அச்சை சார்ந்து Ox என்ற திசையில் உள்ளது. துகளின் மொத்த ஆற்றல் $= E$ ஆகும்.

(i) $E > V_1$ $\quad V_1 =$ புலம் (i)-ல் உள்ள அழுத்தம்

(ii) $E > V_2$ $\quad V_2 =$ புலம் (ii)-ல் உள்ள அழுத்தம்

(iii) $E > V_3$ $\quad V_3 =$ புலம் (iii)-ல் உள்ள அழுத்தம்

நாம் இத் துகளின் இயக்கத்திற்கான ஷ்ராடிங்கர் அலைச் சமன்பாடுகளை மூன்று புலம்களுக்கு ஏற்ப அமைக்கலாம்.

புலன் எண் i :

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \alpha^2\psi_1 = 0; \quad [x < a] \qquad \ldots(11)$$

$$\text{இங்கு} \quad \alpha^2 = \frac{8\pi^2 mE}{h^2}$$

புலம் எண் ii :

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} - \beta^2\psi_2 = 0; \quad [a < x < b] \qquad \ldots(12)$$

$$\text{இங்கு} \quad \beta^2 = \frac{8\pi^2 m}{h^2} \quad (V_1 - E)$$

புலன் எண் iii :

$$\frac{d^2\psi_3}{dx^2} + \gamma^2\psi_3 = 0; \quad [x > b] \qquad \ldots(13)$$

$$\text{இங்கு} \quad \gamma^2 = \frac{8\pi^2 m}{h^2} \quad (E - V_2)$$

இச் சமன்பாடுகளுக்கான தீர்வுகளைக் கீழ்க் கண்டவாறு அமைக்கலாம்.

புலன் எண் i :

$x < a$ (படுகதிர் அலை மற்றும் எதிரொளிப்பு கதிர் அலை)

$$\psi_1 = A\,e^{i\alpha x} + B\,e^{-i\alpha x} \qquad \ldots(14)$$

புலன் எண் ii :

$a < x < b$ (பொதுவான தீர்வு)

$$\psi_2 = Ce^{-\beta x} + D\,e^{\beta x} \qquad \ldots(15)$$

புலன் எண் iii :

$(x > b)$ அலையானது நேர்திசையில் பரவுகிறது.

$$\psi_3 = F\,e^{i\gamma x} \qquad \ldots(16)$$

அலை விசையியலின் தற்கோளின்படி துகளோடு தொடர்புள்ள அலையாக நோக்கும்போது, அதனை ψ எனக் குறித்தோம். மேலும் ψ மற்றும் $\frac{d\psi}{dx}$ என்பவைகள் $x = 0$ மற்றும் $x = a$ என்ற நிலையில் தொடர்ந்ததாக (continuous) இருக்கவேண்டும்.

இப் பிரச்சனைக்கு ஏற்ற எல்லை நிபந்தனைகளை (boundary conditions) அமைக்க வேண்டும். $\psi_1(a) = \psi_2(a)$ மற்றும் $\psi_1'(a) = \psi_2'(a)$

$\psi_2(b) = \psi_3(b)$ மற்றும் $\psi_2'(b) = \psi_3'(b)$

இவற்றைப் பயன்படுத்தி

$$A e^{i\alpha a} + B e^{-i\alpha a} = C e^{-\beta a} + D e^{\beta a}$$

$$i\alpha\left(A e^{i\alpha a} - \beta\ B e^{-i\alpha a}\right) = -\beta\left(C e^{-\beta a} - D e^{\beta a}\right)$$

$$C e^{-\beta b} + D e^{\beta b} = F e^{i\gamma b}$$

$$-\beta\left(C e^{-\beta b} - D e^{\beta b}\right) = i\gamma F e^{i\gamma b}$$

B, C மற்றும் D ஆகியவற்றை விளக்குவோம். பின்னர் $C = b - a$ என அமைத்து சுருக்கினால்

$$\frac{F}{A} = 4\, i\alpha\beta\, e^{i(\alpha a - \gamma b)} \left\{ (\beta + i\alpha)\ (\beta + i\gamma)\, e^{-\beta c} - (\beta - i\alpha)\ (\beta - i\gamma)\, e^{\beta c} \right\}^{-1} \quad ...(17)$$

என்ற இச் சமன்பாட்டைப் பெறலாம்.

இதிலிருந்து ψ_3 என்பது சுழியில்லாதது (non zero) என்பது தெளிவாகும். ஆதலினால் இந்த அழுத்தத் தடுப்பினுள் (potential barrier) துகளானது நுழைந்து அல்லது ஊடுருவி வெளியேறுவதற்கான வாய்ப்பு உள்ளது என்பது தெரிகிறது. ஆகையினால் துகளைத்தடுப்பிற்கு வெளியிலேயும்காணுவதற்கான வாய்ப்புக் குறைந்த அளவிலாவது நிச்சயமாக உள்ளது. இதற்கு எல்லையுடைய குறைந்த நிகழ்தகவு என்று பெயர். இத்தகைய விளைவில் அழுத்தத் தடுப்பினுள் துகளானது ஊடுருவிப் பாய்ந்து

வெளியேறுவதைப் புழல் விளைவு (tunnel effect) என்பர். கதிரியக்கம் பிரிவிலும் (radioactivity) உலோகப் பரப்பிலிருந்து வெளியேறும் எலெக்ட்ரான்கள் பற்றிய கொள்கையிலும் இப் புழல் விளைவு சிறப்பாகப் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது.

செலுத்துகை எண்ணை (Transmission coefficient) கீழ்க் கண்டவாறு வரையறுக்கலாம்.

$$T = \left| \frac{F}{A} \right|^2$$

மேலும் இச்சமன்பாடு துகளைப் அல்லது புலம் ii-ல் காண்பதற்கான நிகழ்தகவின் விகிதத்தையும் தருவதாக உள்ளது.

இப்போது.

$$\frac{F}{A} = 4\, i\alpha\beta\, e^{i(\alpha a - \gamma b)} \left\{ (\beta^2 - \alpha\gamma) + i(\alpha\beta + \gamma\beta)^{-1}\, e^{-\beta c} \right\}$$

செலுத்துகை எண்ணையும் கொடுக்கும்.

$$T \simeq G(\alpha, \beta, \gamma)\, e^{-2\beta c} \qquad \ldots(18)$$

G என்பது α, β, γ ஆகியவற்றின் சார்பலனுக மட்டும் இருக்கும். ஆதலினுல் செலுத்துகை எண் T ஆனது C-யின் மதிப்பைப் பொருத்தே அமையும். C-யின் மதிப்பு $e^{-2\beta c}$ என்ற உறுப்பின் சுழியாகச் செயல் புரியும்.

எதிரொளிப்பு எண் $T_{எதி}$ என்பதைக் கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கலாம்

இது எதிரொளித்த கதிர் மற்றும் படுகதிர் ஆகியவற்றின் நிகழ்தகவு ஒப்பு அடர்த்திகளின் (probability densities) விகிதத்திற்குச் சமமாகும் எனலாம். இது எதிரொளிப்பு எண் T எதிர் எனப்படும்.

$$T_{எதி} = \frac{\psi^*_{எதி}\ \psi_{எதி}}{\psi^*_{படு}\ \psi_{படு}} = \frac{\text{எதிரொளிக்கப்பட்ட துகள்களின் எண்ணிக்கை/விநாடி}}{\text{தடுப்பினை அடையும் துகள்களின் எண்ணிக்கை/விநாடி}}$$

இதே போன்று செலுத்துகை எண் $T_{\text{செ}}$ (Transmission coefficient) ஐயும் வரையறுக்கலாம்.

$$T_{\text{செ}} = \frac{\alpha_2 \psi^*_{\text{செ}}\, \psi}{\alpha_1 \psi^*_{\text{செ}}\, \psi} = \frac{\text{செலுத்துகைக்கு உட்பட்ட துகள்களின் எண்ணிக்கை/விநாடி}}{\text{தடுப்பினை அடைந்த துகள்களின் எண்ணிக்கை/விநாடி}}$$

இவ்வாறு இரண்டு $T_{\text{எதிர்}}$ மற்றும் $T_{\text{செ}}$ ஆகியவற்றை எதிர் வரையறுக்கலாம்.

இதனால் துகளின் ஆற்றலானது (E) சுழிக்குச் சமமாக இல்லாத நிலையில் ($E \neq 0$) துகளானது தடுப்பை ஊடுருவி வெளியே தப்ப இயலும், என்பது தெளிவாகிறது; துகளின் ஆற்றல் தடுப்பின் ஆற்றலைவிடக் குறைவாக இருந்தபோதிலும் ஊடுருவல் நிகழலாம். இதனை நாம் குவான்டம் விசையியல் (quantum mechanical) புகழ் விளைவு (tunnel effect) என்று கூறுகிறோம். அணுக்கரு இயற்பியலில் (nuclear physics) இப் புழல் விளைவு கோட்பாட்டையும் அதன் சிறப்பான பயன்களையும் காணலாம்.

(c) நேரியல் சீரிசை அலையியற்றி (Linear Harmonic Oscillator)

ஒரு பரிமாண இயக்கம்

ஒரு துகள் நேர்கோட்டில் (x அச்சில்) எளிய சீரிசை இயக்கத்தோடு (simple harmonic motion) இருப்பதாகக் கொள்வோம். இத் துகளைச் சமநிலைப் புள்ளிக்கு இழுக்கும் அல்லது இழுத்து வரும் ஓர் அலகு இடப்பெயர்ச்சிக்கான மீட்சி விசையை (restoring force) k எனக் கொள்வோம். இத் துகளின் பொருண்மையை m எனக் கொள்வோம். இத்துகளின் இயக்கத்தை $x = A \sin 2\pi\gamma t$ என அமைக்கலாம்.

x என்பது துகளின் இடப் பெயர்ச்சி, A என்பது அதன் வீச்சு, γ என்பது அதிர்வெண் t என்பது காலத்தைக் குறிக்கும்.

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = 2\pi\gamma\, A \cos 2\pi\gamma t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -4\pi^2\gamma^2 A \sin 2\pi\gamma t = -4\pi^2\gamma^2 x$$

மீள்

~~[illegible]~~ விசை $= -m\,\dfrac{d^2x}{dt^2} = 4\pi^2\gamma^2 mx$

$$\therefore \text{ நிலையாற்றல் } V = \int_0^x 4\pi^2\gamma^2 mx\,dx = 2\pi^2\gamma^2 mx^2$$

இந்நிலையாற்றலுக்கான மதிப்பினை ஷ்ராடிங்கர்சமன்பாட்டில் பயன்படுத்துவோம்.

ஷ்ராடிங்கர் சமன்பாடு

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - V)\psi = 0$$

v-யின் மதிப்பைப் புகுத்துவோம்.

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - 2\pi^2\gamma^2 mx^2)\psi = 0 \qquad \ldots(19)$$

புதிய ஒரு மாறியை (variable) kயை ஈண்டு பயன் படுத்துவோம். $k = x\sqrt{b}$ எனக் கொள்வோம். இதில் b என்பது ஒரு மாறிலி (constant) b யின் மதிப்பு $b = \dfrac{4\pi^2 m\gamma}{h}$ எனக் கொள்வோம்.

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\cdot$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial k}\,\frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial k}\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\,\frac{\partial k}{\partial x}$$

$$\therefore \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial k}\,\frac{\partial\psi}{\partial k}\cdot\left(\frac{\partial k}{\partial x}\right)^2$$

$$= \frac{\partial^2\psi}{\partial k^2}\left(\frac{\partial k}{\partial x}\right)^2$$

$$\because k = x\sqrt{b}, \quad \frac{\partial k}{\partial x} = \sqrt{b}$$

$$\text{அல்லது } \left(\frac{\partial k}{\partial x}\right)^2 = b$$

$$\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = b\,\frac{\partial^2\psi}{\partial k^2}}$$

இதனை ஷ்ராடிங்கர் சமன்பாட்டில் பயன்படுத்துவோம்.

$$\therefore \quad b\frac{\partial^2 \psi}{\partial k^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E - 2\pi^2\gamma^2 m \frac{k^2}{b}\right)\psi = 0$$

மேலும் $\frac{8\pi^2 mE}{h^2} = a$ எனக் கொள்வோம். எனவே

$$b\frac{\partial^2 \psi}{\partial k^2} + (a - bk^2)\psi = 0 \text{ அல்லது}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial k^2} + \left(\frac{a}{b} - k^2\right)\psi = 0 \qquad \text{...(20)}$$

அலை அணிக்கோவையின் விளக்கப்படி $k = 0$ ஆக இருக்கும் போது, ψ ஆனது முடிவுள்ளதாகவும் (finite), தொடர்ச்சியான தாகவும் (continuous) மற்றும் ஒருமை மதிப்புடையதாகவும் (single valued) இருக்க வேண்டும் என்பது தெளிவாகும்.

மேற்கூறிய சமன்பாட்டிற்குத் தக்க சிறப்பான தீர்வினைப் பெற்று விடலாம். தீர்வுகளாவன :—

$\frac{a}{b} = 1$ ஆக இருக்கும்போது $\psi = \frac{1}{2} e^{-\frac{k^2}{2}}$ ஆகும்.

$\frac{a}{b} = 3$ ஆக இருக்கும்போது $\psi = 2Ke^{-\frac{k^2}{2}}$ ஆகும்.

$\frac{a}{b} = 5$ ஆக இருக்கும்போது $\psi = (4k^2 - 2)e^{-\frac{k^2}{2}}$ ஆகும்.

$\frac{a}{b} = 7$ ஆக இருக்கும்போது $\psi = (8k^2 - 12k)e^{-\frac{k^2}{2}}$

... ... ஆகும்.

எனவே $\frac{a}{b}$ யின் தனித்தன்மை பெற்ற மதிப்புகள் (proper values) $(2n+1)$ என இருப்பதைக் காணலாம். இங்கு n என்பது ஒரு முழு எண்ணைக் குறிக்கும். $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ என்பனவற்றிற்கேற்ற அலை அணிக்கோவையின் (ψ) மதிப்புகள் தனித் தன்மையும் சிறப்பியல்பும் கொண்ட சார்பலன்கள் (characteristic eigen functions) என வழங்கப்படும்.

aயின் மதிப்பினையும் bயின் மதிப்பினையும் பயன்படுத்துவோம்

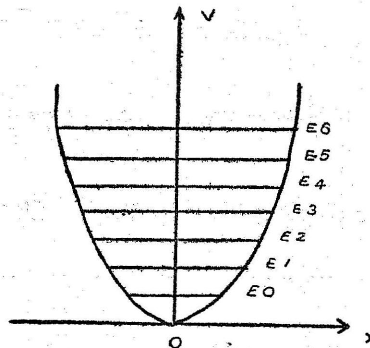
$$\frac{a}{b} = \frac{8\pi^2 mE}{h^2} \times \frac{h}{4\pi^2 m\gamma} = \frac{2E}{h\gamma} = (2n+1) \quad \ldots(21)$$

$$\therefore \quad E = (n + \tfrac{1}{2})\, h\gamma \; ; \quad \ldots(22)$$

$$n = 0, 1, 2, 3$$

இது நேரியல் சீரிசை அலைவியற்றியின் ஆற்றலுக்கான கோவையாகும். இது சீரிசை அலைவியற்றியின் குவான்டம் நிலைகளை விவரிப்பதாகவுள்ளது. இது அலைவிசையியல் அடிப்படையில் பெறப்பட்ட கோவையாகும். இங்கு சுழி–நிலை ஆற்றல் சுழியாக இருப்பதற்கு மாற்றாக $\frac{1}{2}h\gamma$ ஆக இருப்பதை மறந்து விடக்கூடாது.

சீரிசை அலைவியற்றின் ஆற்றல் $h\gamma$ என்ற அளவினை குவான்டங்களாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளன. இங்கு h என்பது பிளாங்க்கின் மாறிலி ஆகும். மற்றும் γ என்பது அலையின் அதிர்வெண் ஆகும். ஆற்றல் நிலைகளுக்கான படம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஆற்றல் நிலைகள் இடைவெளியோடு அமைந்திருப்பது ஒரு சிறப்பான அம்சமாகும். மேலும் $n = 0$ ஆகும் போது $E = 0$ ஆக இருப்பதில்லை. மாற்றாக $E_0 = \frac{1}{2}h\gamma$ என்பது கிடைக்கிறது. இது சுழிப்புள்ளி ஆற்றல் (zero point energy) ஆகும்.

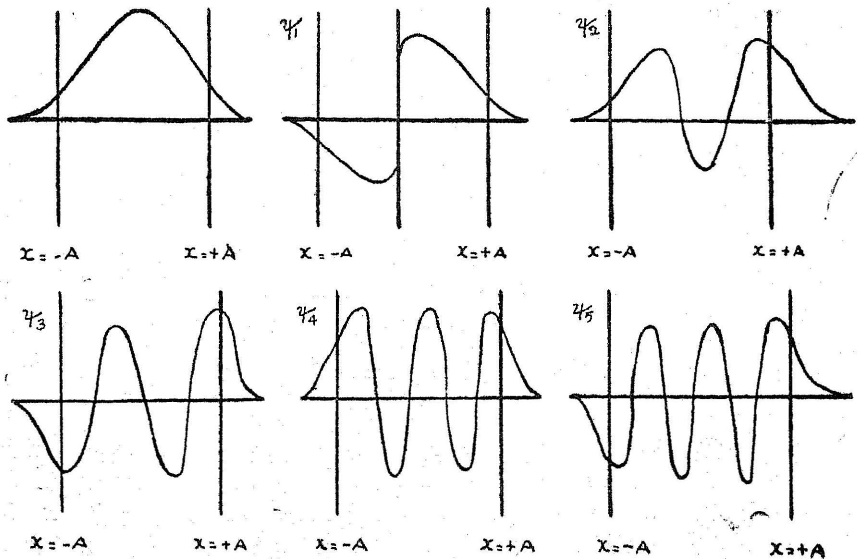


படம் 34. அலைவிசையியலின்படி சீரிசை அலைவியற்றியின் ஆற்றல் நிலைகள (Energy levels)

சீரிசை அலைவியற்றி தன் சூழலோடு சமநிலையில் (equilibrium) இருக்கும் போது அதன் ஆற்றல் $E = E_0$ ஆகும். ஆகவே வெப்பநிலை $0°k$ஐ அடையும் நிலையில் $E = 0$ ஆக இல்லையானல் $E = E_0$ ஆக அமையும் என்பதை நினைவில் கொள்ள

சீரிசை அலைவியற்றியின் அலைச் சார்பலன்களை மிகத் துல்லியமாகக் கண்டறிய ஹெர்மிர் பல்லுறுப்புக்கோவை (Hermite's polynomials) சிறப்பாகப் பயன்படுகின்றன. இவற்றின் உதவியால் எல்லா அலைக்கோவைகளையும் அல்லது அலைச் சார்பலன்களையும் ψ_n கண்டறியலாம். இதனை வரைபடம் மூலம் விளக்கலாம். ஒவ்வொரு வரைபடத்திலும் இதே அளவு ஆற்றல் E_n கொண்ட முதுபழங் கொள்கை சீரிசை அலைவியற்றியின் இயக்க எல்லைகளும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ($x = A$ மற்றும் $x = -A$) இவ் வெல்லைகளுக்கு அப்பால் அலைவியற்றியின் இயக்கத்தைக் காண இயலாது என்பது முதுபழங் கொள்கையின் கருத்தாகும். இது விளக்கப்பட்ட புலம் (forbidden region) என்று அழைக்கப்படுகிறது. அலைவிசையியலின்படி நாம் அலைவியற்றியை எல்லைக்கப்பாலும் காண இயலும் என்பதை இங்கு வரைபடம் விளக்குகிறது.

மேலும் முதுபழங் கொள்கைக்கும் நவீன குவான்டம் கொள்கைக்கும் உள்ள ஒப்புமைகளைச் சிறிது காணலாம்.



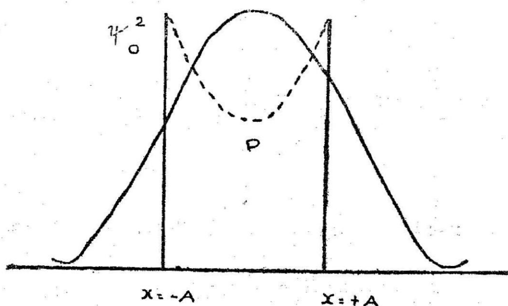
படம் 35 சீரிசை அலைவியற்றியின் முதல் ஆறு அலைச் சார்பலன்கள் அல்லது கோவை— $-A$ மற்றும் $+A$ எனற புள்ளிகளில் உள்ள கோடுகள் முதுபழங் கொள்கை அலைவியற்றியின் இயங்கு எல்லைகளாகும்



குவான்டம் விசையியல் மற்றும் முதுபழங் கொள்கை ஆகியவற்றின் அடிப்படையில் சீரிசை அலைவியற்றியின் நிகழ் தகவு அடர்த்திகள்

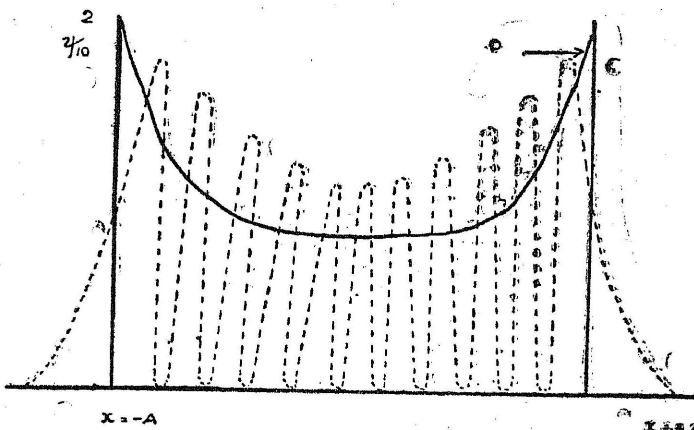
இங்குள்ள வரைபடம் (36) நிகழ் தகவு அடர்த்தி பற்றி விளக்குவதாக அமைந்துள்ளது. படத்தில் முதுபழம் அலை விசையியற்றியின் நிகழ் தகவு அடர்த்தி புள்ளியிட்ட வளை கோடாகக் (dotted curve) காட்டப்பட்டுள்ளது. குவான்டம் எண் $n = 0$.

ஒரு துகளை ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் காண்பதற்கான நிகழ்தகவு $x = -A$ மற்றும் $x = +A$ என்ற நிலையில் மிகவும் அதிகமாகவும் $x = 0$ என்ற சமநிலையில் நிகழ் தகவு மிகவும் குறைவாகவும் காணப்படுகின்றது. $x = -A$ மற்றும் $x = +A$ ஆகிய புள்ளிகளில் துகள் மிக நிதானமாக இயங்குகிறது. எனவே அதிக நிகழ்தகவு உள்ளது. $x = 0$ என்ற சமநிலைப் (equilibrium position) புள்ளியில் துகளின் இயக்கம் விரைவாக உள்ளதால் அவ்விடத்தில் அதன் நிகழ்தகவு மிகவும் குறை வாகும். இதனை வரைபடத்தில் புள்ளியிட்ட வளைகோடு விளக்கு வதாக உள்ளது.



படம் 36. நிகழ்தகவு அடர்த்தி $n = 0$; ψ_0^2

இதற்கு நேர்மாறான ஒரு செயலை அலைவிசையியல் சீரிசை அலைவியற்றி வெளிப்படுத்துவதாகவுள்ளது. கிடைமட்ட ஆற்றல் நிலையில் ($n=0$) இத் துகளின் நிகழ்தகவு அடர்த்தி ψ_0^2 $x=0$ என்ற புள்ளியில் அதிகமாகவும், மற்ற இரண்டு பக்கங்களிலும் குறைந்துகொண்டே செல்வதையும் காண்கிறோம். இத்தன்மை நேர்மாறாக இருக்கின்றது. ஆனால் மேற்கூறிய மாறுபாடு nயின் மதிப்பு அதிகமாக அதிகமாகக் குறைந்துகொண்டே வருகிறது. எடுத்துக்காட்டாகக் கீழ்க்காணும் வரைபடத்தை எடுத்துக் கொள்வோம்.



படம் 37. குவான்டம் எண் n=10 க்கான நிகழ்தகவு அடர்த்தி—புள்ளியிட்ட வளைகோடு—குவான்டம் விசையியல் அலையியற்றி தொடர் வளைகோடு—முதுபழம் விசையியல் அலையியற்றி

மேற்கூறிய வரைபடம் குவான்டம் எண் $n = 10$க்கானது. P என்ற தொடர் வளைகோடு முதுபழம் விசையியல் அலையியற்றிக்கான நிகழ்தகவு அடர்த்தியையும் தொடர்கோடு குவான்டம் விசையியல் அலையியற்றியின் நிகழ்தகவு அடர்த்தியையும் குறிக்கின்றன. இவையிரண்டு வளைகோடுகளும் சற்றேறக் குறைய ஒரே அமைப்பைக் கொண்டுள்ளன. இருவிசையியலுக்குமிடையேயுள்ள ஒப்புமைகளை எடுத்துச் சொல்வதாக உள்ளது. ஆகவே இதனை ஒப்புவமைக் கோட்பாட்டிற்கு ஒரு எடுத்துக்காட்டாகக் கொள்ளலாம்.

எனவே, முதுபழங் கொள்கைக்கும் புதிய குவான்டம் கொள்கைக்கும் இடையேயுள்ள ஒற்றுமைகளை மேற்கூறிய ஒப்புமைத் தத்துவம் (correspondence principle) கூறுவதாக அமையும். இத்தகைய இரு கொள்கைகளுக்குமிடையே உள்ள ஒப்புமைகளைக் கண்டு "போர்" என்னும் விஞ்ஞானி இத் தத்துவத்திற்கு ஒப்புமைத் தத்துவம் என்ற பொருத்தமான பெயரினைக் கொடுத்தார்.

எனவே, குவான்டம் மற்றும் முதுபழங் கொள்கைகள் குறைந்த குவான்டம் எண் (n) கொண்ட தொகுதிகளில் நேர் எதிரான பண்புகளையும், நிறைந்த குவான்டம் எண் கொண்ட தொகுதிகளில் ஒரே மாதிரியான பண்புகளையும் கொடுப்பனவாக உள்ளன. அதிகக் குவான்டம் எண் கொண்ட தொகுதிகளுக்கு

ஒப்புமைத் தத்துவம் சிறப்பாகப் பொருந்தி இரு விசையியல்களும் ஒரே தன்மை கொண்ட முடிவுகளைத் தருகின்றன என்பது தெளிவாகிறது.

5:5. ஷ்ராடிங்கர் சமன்பாட்டின் பயன்கள்-முப்பரிமாணம்

(a) **முப்பரிமாணப் பெட்டகத்தில் துகள்** (Particles in a three—Dimensional Box)

முப்பரிமாணப் பெட்டகத்தைக் கீழ்க்கண்டவாறுவரையறுக்கலாம்

$$O \leq x \leq l_1$$

$$O \leq y \leq l_2$$

$$O \leq z \leq l_3$$

இத்துகளுக்கான அலைச் சமன்பாட்டினை

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{8\pi^2 mE}{h^2}\psi = 0 \qquad ...(1)$$

என அமைக்கலாம்.

மாறிகளைப் பிரித்து எடுக்கும் (seperation of variables technique) நுட்பத்தினைப் பயன்படுத்தி, மேற்கூறிய சமன்பாட்டிற்குத் தனித்தனியாகப் பிரித்துத் தீர்வு காணலாம்.

சமன்பாடு எண் (1)ஐ மூன்று கூறுளகாகப் பிரிக்கலாம்.

$$\frac{d^2X}{dx^2} = -a_1^2 X$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} = -a_2^2 Y$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} = -a_3^2 Z$$

இங்கு அலைச் சார்புலன் (wave function)

$\psi(x, y, z) = X(x)\ Y(y)\ Z(z)$ என அமையும்.

மேலும் $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \dfrac{8\pi^2 mE}{h^2}$ ...(2)

என்ற சமன்பாட்டைப் பெறலாம்.

ஆதலினால்,

$$X = \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\ \alpha_1 x;$$

$$Y = \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\ \alpha_2 y;$$

$$Z = \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\ \alpha_3 z.$$

இதற்கான தீர்வு $\phi = 0; \quad x, y, z = 0$

$\phi = A \sin \alpha_1 x \quad \sin \alpha_2 y \quad \sin \alpha_3 z$

இங்கு A என்பது ஒரு மாறிலி (constant)

$\because \quad x = l_1, \quad y = l_2, \quad z = l_3$ ஆக இருக்கும்போது $\phi = 0$ ஆகும்.

எனவே,

$$\alpha r\ lr = nr\ \pi \quad (r = 1, 2, 3;\ n_r = 1, 2 \ldots\ldots)$$

ஆதலினால்,

$$\phi\ (x, y, z) = A \sin\left(\frac{n_2 \pi x}{l_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi y}{l_2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{n_3 \pi z}{l_3}\right) \qquad \ldots(3)$$

எனலாம்.

நார்மல் செய்யப்பட்ட (normalising) ϕ கீழ்க்கண்டவற்றைத் தருவதாக அமையும்.

$$\int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \int_0^{l_3} \phi^2\ dx\ dy\ dz = 1$$

$$= A^2 \int_0^{l_1} \sin^2\left(\frac{n_1 \pi x}{l_1}\right) dx \int_0^{l_1} \sin\left(\frac{n_2 \pi y}{l_2}\right) dy$$

$$X \int_0^{l_3} \sin^2\left(\frac{n_3 \pi z}{l_3}\right) dz$$

$$1 = A^2 \left(\frac{l_1 l_2 l_3}{8}\right)$$

அதனால்,

$$A = \left\{\frac{8}{l_1 l_2 l_3}\right\}^{\frac{1}{2}} \quad \ldots(4)$$

எனவே சமன்பாடு எண் (2)-ல் இருந்து ஆற்றலுக்கான மதிப்புக்களைப் பெறலாம்.

$$\text{ஆற்றல்} = E \quad \frac{h^2}{8m} \left\{\frac{n_1^2}{l_1^2} + \frac{n_2^2}{l_2^2} + \frac{n_3^2}{l_3^2}\right\} \quad \ldots(5)$$

இச் சமன்பாடு எண் (5)ஐ கீழ்வரும் சமன்பாட்டுடன்

$$\frac{n_1^2}{a_2^2} + \frac{n_2^2}{a_2^2} + \frac{n_3^2}{a_3^2} = \frac{4r^2}{c^2}$$

ஒப்பிடுவோம்.

ஒரு பரும அலகில் (unit of volume) E மற்றும் $E + \Delta E$ என்ற ஆற்றல் எல்லைக்குள் உள்ள ஐகன் நிலைகளைக் (eigen states) கீழ்க்கண்ட கோவையைக் கொண்டு காணலாம்.

$$N = \frac{2\pi}{h^3} \quad (2m)^{\frac{3}{2}} \quad E^{\frac{1}{2}} \quad \Delta E \quad \ldots(6)$$

இங்கு N என்பது ஐகன் நிலைகளின் எண்ணிக்கை h-என்பது பிளாங்கின் மாறிலி. m துகளின் பொருண்மையாகவும், m துகளின் பொருண்மையாகவும், E துகளின் ஆற்றலாகவும் அமையும்.

(b) மைய விசைப் புலனில் துகள்

ஷ்ராடிங்கர் சமன்பாடு : கோளச் சீரமைவுள்ள புலன்கள்

ஒரு துகள் மையக் கோளச் சீரமைவு கொண்ட விசைப் புலத்தில் (central, spherically symmetric potential field of force) இருப்பதாகக் கொள்வோம். இத் துகளின் நிலை ஆற்றல்

இத் துகளுக்கும் மைய விசைப் புள்ளிக்கும் (centre of force). இடைப்பட்ட தூரத்தைப் (r) பொருத்து அமையும். இத்தகைய புலனில் இயங்கும் துகள்களுக்கு நிலையாற்றலை r-ன் சார்பலனாகக் $v(r)$ கொள்ளலாம். r என்பது மைய விசைப் புள்ளியாகும். மையப் புள்ளியின் துகளுக்கும் இடைப்பட்ட தூரமாகும். இத்தகைய தொகுதிக்கான (system) ஷ்ராடிங்கர் சமன்பாட்டினைக் கீழ்க்கண்டவாறு அமைக்கலாம்.

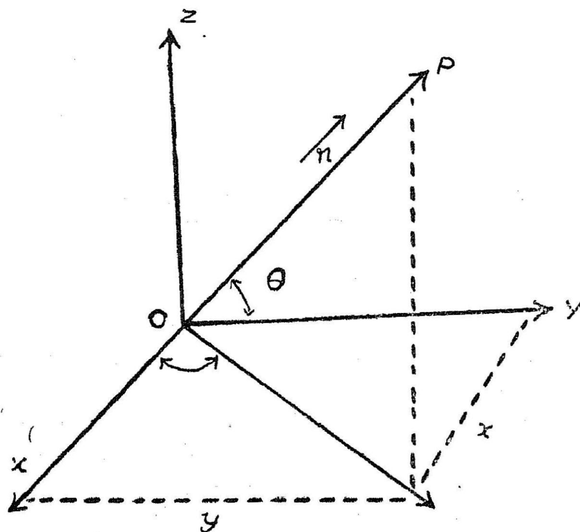
$$\nabla^2\psi + \frac{2m}{h^2}\left[E - V(r)\right]\psi = 0 \qquad ...(7)$$

இத்தகைய தொகுதிகளை விவரிப்பதற்கும், ஷ்ராடிங்கர் சமன்பாட்டினைப் படைப்பதற்கும் கோள துருவ ஆயத் தொலைவுகளைப் (spherical polar coordinates) (r, θ, φ) பயன் படுத்துதல் மிகவும் பொருத்தமாக அமையும். மேலும், இங்கு துகள் அல்லது ஒரு தொகுதியின் நிலையாற்றல் v (r) θ மற்றும் φ ஆகிய கோணங்களைப் பொருத்துச் சார்பலனாக அமைவதில்லை. நிலையாற்றல் r-ன் சார்பலனாகவேயுள்ளது.

P என்ற புள்ளியைக் கார்ட்டீசியன் ஆயத் தொலைவுகள் மூலம் கீழ்க் கண்டவாறு குறிப்பிடுகிறோம். P-யின் ஆயத் தொலைவுகள் (x, y, z) ஆக இருக்கட்டும். P என்ற புள்ளியைக் கோள-துருவ ஆயத் தொலைவுகள் மூலம் கீழ்க் கண்டவாறு அமைக்கலாம். P என்ற புள்ளியை r, θ, φ என கோள-துருவ ஆயத் தொலைவுகள் மூலம் படத்தில் காட்டியுள்ளபடி அமைக்கலாம். இங்கு $r = OP$ ஆகும். O-வை மையமாகக் கொண்டு rஐ ஆரமாகக் கொண்டு ஒரு கோளத்தை அமைத்தால் P என்ற புள்ளி இக் கோளத்தின்மீது θ என்ற கோண அளவிலே அமையும். இக் கோணத்திற்கு இணை அகலாங்கு (colatitude) எனப் பெயர். அதாவது θ என்பது OP-க்கும் z அச்சுக்கும் இடையேயுள்ள கோணமாகும். φ என்பது திசைக் கோணம் (longitudinal or azimuthal) எனப்படும். xz தளத்திற்கும் OPZ தளத்திற்கும் இடைப்பட்ட கோணமாகும்.

எனவே, கார்ட்டீசியன் ஆயத் தொலைவுகளிலிருந்து கோள-துருவ ஆயத் தொலைவுகளுக்கு மாற்றும் வகையினைக் காணலாம். ஒரு புள்ளி P-யின் கார்ட்டீசியன் ஆயத் தொலைவுப்படி (x, y, z) எனக் கொண்டால் அதன் கோள-துருவ ஆயத் தொலைவுகளை

(r, θ, φ) எனப் படத்தில் காட்டியபடி மாற்றியமைக்கலாம். இதற்கான மாற்றுச் சமன்பாடுகளை இங்கு காணலாம்.



படம் 38

$$\left.\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\phi \\ y &= r \sin\theta \sin\phi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(8)$$

சமன்பாடு (2) லிருந்து

$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ என்பது தெளிவாகும்

$$\left.\begin{aligned} \text{அல்லது } r &= \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} \\ \tan\phi &= y/x \\ \text{மற்றும் } \tan\theta &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2)}}{z} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(9)$$

சமன்பாடு (8) மற்றும் (9) ஐ பயன்படுத்துவோம்.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial x} &= \sin\theta\cos\phi;\\
\frac{\partial r}{\partial y} &= \sin\theta\sin\phi; \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \cos\theta\\
\frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\cos\theta\cos\phi}{r};\\
\frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\cos\theta\sin\phi}{r}; \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = -\frac{\sin\theta}{r}\\
\frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{\sin\phi}{r\sin\theta};\\
\frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{\cos\phi}{r\sin\theta}; \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0
\end{aligned}\right\} \quad \ldots(10)$$

பின்னர்

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \phi}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$= \sin\theta\cos\phi\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \phi}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial}{\partial x} = \sin\theta\cos\phi\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

இப்போது

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)$$ எனக் கொள்வோம்.

$$= \left(\sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\right)$$

$$\times\left(\sin\theta\cos\phi\ \frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\ \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right.$$

$$\left.-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\ \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)\qquad\ldots(11)$$

இதைப் போன்று

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=\left(\sin\theta\ \sin\varphi\ \frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\cos\theta\ \cos\varphi}{r}\ \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right.$$

$$\left.-\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\ \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)$$

என அமைக்கலாம். இதனால்,

$$\frac{\partial}{\partial y}=\left(\sin\theta\ \sin\varphi\ \frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta\ \cos\varphi}{r}\ \frac{\partial}{\partial\theta}\right.$$

$$\left.-\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\ \frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

எனவும்

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=\left(\sin\theta\sin\varphi\ \frac{\partial}{\partial r}\right.$$

$$\left.+\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\ \frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\cos\theta}{r\sin\theta}\ \frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

$$\times\left(\sin\theta\ \sin\varphi\ \frac{\partial\psi}{\partial r}\times\frac{\cos\theta\ \cos\varphi}{r}\right.$$

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial\theta}-\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\ \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)\qquad\ldots(12)$$

அமைக்கலாம்.

மேலும், $\frac{\partial\psi}{\partial z}=\left(\cos\theta\ \frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\ \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)$

ஆதலின், $\frac{\partial}{\partial z}=\cos\theta\ \frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\ \frac{\partial}{\partial\theta}$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$$

$$= \left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

$$\times \left(\cos\theta \frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) \quad ...(13)$$

சமன்பாடு எண் (11), (12) மற்றும் (13) ஆகியவற்றைக் கூட்டி, அதன் பின்னர் அதனை எளிமையானதாக்க வேண்டும்.

பின்னர் $\nabla^2\psi$ ஐ

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

எனக் கொண்டு இதற்கொப்பான மேற்கூறிய சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்துவோம். பின்னர் எளிமைப்படுத்திக் கீழ்க்கண்ட வாறு அமைக்கலாம்:

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} \quad ...(14)$$

இதனைச் சமன்பாடு எண் (7)-ல் பயன்படுத்தினால் ஷ்ராடிங்கர் அலைச் சமன்பாட்டைக் கோள-துருவ ஆயத் தொலைத் தொகுதி யில் மைய சீரமைவு கொண்ட புல விசையில் பெறுவோம்.

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)$$

$$+ \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\Big[E - V(r)\Big]\psi = 0$$

...(15)

இச் சமன்பாடு மையச் சீரமைவு புலனில் இயங்கும் துகள் பற்றியதாகும். இத் துகளுக்கான ஷ்ராடிங்கர் அலைச் சமன் பாட்டினைக் கோள-துருவ ஆயத் தொகுதியில் அமைக்கப் பட்டிருப்பதை சமன்பாடு எண் (15) விளக்குவதாக அமையும்.

இச் சமன்பாடு திண் சுழலி (rigid rotator) மற்றும் ஹைட் ரஜன் அணு பற்றிய கொள்கையில் நன்கு பயன்படுத்தப் பட்டுள்ளது.

(c) சுழல் உந்தம் (Angular Momentum)

ஹெமில்டோனியன் ஆபரேட்டர் சிறப்பும் முக்கியத்துவமும் கொண்டதாகும். இதே போன்று சுழல் உந்தத்தோடு தொடர்பு கொண்ட ஆபரேட்டர்களும் சிறப்பும் முக்கியத்துவமும் கொண்டனவாகும். ஒரு துகள் வட்டப் பாதையில் செல்வதாகக் கொண்டால், அதன் மையப் புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட சுழல் உந்தமானது. $M = r \times p$, r என்பது துகளுக்கும், வட்டப் பாதையின் மையத்திற்கும் இடைப்பட்ட தூரமாகும். மற்றும் P என்பது நேரியல் உந்தம் (linear momentum). நேரியல் உந்தத்தின் கூறுகளாவன Mx, My மற்றும் Mz ஆகும். இவை யாவும் கார்ட்டீசியன் ஆயக் கூறுகளாகும்.

$$\left.\begin{aligned} Mx &= y\,Pz - z\,Py \\ My &= z\,Px - x\,Pz \\ Mz &= x\,Py - y\,Px \end{aligned}\right\} \quad \ldots(16)$$

இங்கு உந்தங்களுக்கான (Ps) குவான்டம் விசையியல் ஆபரேட்டர்களைப் பயன்படுத்துவோம். சுழல் உந்தங்களுக்கான கூறுகளை ஆபரேட்டர்கள் மூலம் கீழுள்ளவாறு அமைக்கலாம்,

$$\left.\begin{aligned} Mx &= \frac{h}{2\pi i}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ My &= \frac{h}{2\pi i}\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial}\right) \\ Mz &= \frac{h}{2\pi i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots(17)$$

மொத்தச் சுழல் உந்தம்.

$$M = i\,Mx + j\,My + k\,Mz \quad \ldots(18)$$

மேலும், $M^2 = Mx^2 + My^2 + Mz^2$ ...(19)

சுழல் உந்த ஆபரேட்டர்கள், பொதுவாகக் கோள ஆயத் தொலைகள் (spherical co-ordinates) மூலமே கோவைப்படுத்தப் படும்.

மாற்றுச் சமன்பாடுகளின் உதவியால் கார்ட்டீசியன் தொகுதியிலிருந்து கோள ஆயத் தொலைகளுக்கு மாற்றி யமைக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக இங்கு Mxஐ மாற்றுவோம்.

மாற்றுச் சமன்பாடுகள்.

$$\left.\begin{aligned} x &= r\sin\theta \cos\varphi \\ y &= r\sin\theta \sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad \ldots(20)$$

தலைகீழ் மாற்றுச் சமன்பாடாக

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ \cos\theta &= \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \tan\varphi &= y/x \end{aligned}\right\} \quad \ldots(21)$$

இதிலிருந்து நாம் பகுதி வகைக் கெழுக்களைக் (Partial derivatives) காணலாம்.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial z} &= \cos\theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial z} &= -\frac{\sin\theta}{r} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots(22) \qquad \left.\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial y} &= \sin\theta \sin\varphi \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\cos\theta \sin\varphi}{r} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta} \end{aligned}\right\}$$

$$\ldots(23)$$

எனவே,

$$Mx = \frac{h}{2\pi i}\left[y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right] \quad \ldots(24)$$

$$= \frac{h}{2\pi i}\left[r\sin\theta \sin\varphi\left(\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\right.$$

$$\left. - r\cos\theta\left(\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\right]$$

$$= \frac{h}{2\pi i}\left[(r \sin\theta \sin\varphi \cos\theta - r\cos\varphi \sin\theta \sin\varphi)\frac{\partial}{\partial r}\right.$$

$$+ (-\sin^2\theta \sin\varphi - \cos^2\theta \sin\varphi)\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$\left. + (-\cos\theta\cos\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]$$

$$= \frac{h}{2\pi i}\left[-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\cot\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]$$

$$Mx = \frac{h}{2\pi i}\left[-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\cot\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] \quad ...(25)$$

இதே போன்று

$$My = \frac{h}{2\pi i}\left[\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] \quad ...(26)$$

$$Mz = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial\varphi} \quad ...(27)$$

$$M^2 = -\frac{h^2}{4\pi^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] \quad ...(28)$$

Mx, *My* மற்றும் *Mz* ஆகியவற்றிற்கான கார்ட்டீசியன் தொகுதியில் உள்ள கோவைகளைப் பயன்படுத்தி இவைகளுக்கிடையேயுள்ள பரிமாற்று விதியைப் (commutation rules) பெறலாம்.

$$Mx\ My = -\frac{h^2}{4\pi^2}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$= -\frac{h^2}{4\pi^2}\left\{y\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial}{\partial x}\right) - y\frac{\partial}{\partial z}\left(x\frac{\partial}{\partial z}\right)\right.$$

$$- z \frac{\partial}{\partial y}\left(z \frac{\partial}{\partial x}\right) + z \frac{\partial}{\partial y}\left(x \frac{\partial}{\partial z}\right)\Big\}$$

$$= - \frac{h^2}{4\pi^2}\Big\{ y \frac{\partial z}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} + yz \frac{\partial^2}{\partial z\, \partial x}$$

$$- y \frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$- yx \frac{\partial^2}{\partial z^2} - z \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - z^2 \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x}$$

$$+ z \frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} + zx \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial z}\Big\}$$

$$Mx\ My = - \frac{h^2}{4\pi^2}\Big\{ y \frac{\partial}{\partial x} + yz \frac{\partial^2}{\partial z\, \partial x}$$

$$- yx \frac{\partial^2}{\partial z^2} - z^2 \frac{\partial z}{\partial y\, \partial x} + zx \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial z}\Big\} \quad ...(29)$$

இதே போன்று,

$$My\ Mx = - \frac{h^2}{4\pi^2}\Big\{ yz \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} - z^2 \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}$$

$$- xy \frac{\partial^2}{\partial z^2} + x \frac{\partial}{\partial y} + xz \frac{\partial^2}{\partial z\, \partial y}\Big\}$$

$$...(30)$$

எனவே,

$$Mx\ My - My\ Mx = - \frac{h^2}{4\pi^2}\left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{ih}{2\pi}\ \frac{h}{2\pi i}\left(x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{ih}{2\pi}\ Mz$$

$$...(31)$$

இதே போன்று கீழ்க்கண்டவற்றையும் நாம் காணலாம்.

$$My\ Mz - Mz\ My = \frac{ih}{2\pi}\ Mx \quad ...(32)$$

$$Mz\ Mx - Mx\ Mz = \frac{ih}{2\pi}\ My \quad ...(33)$$

இதே போன்று M^2 மற்றும் Mz ஆகியவற்றிற்கான கோவைகளைக் கோள ஆயத் தொலைகளில் எடுத்துக்கொண்டு இவைகளுக்கிடையேயுள்ள பெருக்கலுக்கான பரிமாற்று விதியை (commu tative law) நிரூபிக்கலாம்.

அதாவது.

$$\left.\begin{aligned} M^2 Mx - Mx\ M^2 &= 0 \\ M^2 My - My\ M^2 &= 0 \\ M^2 M^2 - Mz\ M^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots(34)$$

எனவே M^2 ஆனது Mx, Mz மற்றும் Mz ஆகியவற்றுடன் பரிமாற்றிக் கொள்ளும் தன்மை கொண்டது ஆகும்.

மேற்கூறிய பரிமாற்று விதி ஒரு துகளுக்கும் மற்றும் துகள்கள்கொண்ட ஒரு தொகுதிக்கும் பொருந்துவதாகவுள்ளது.

(d) திண் சுழலி (Rigid Rotator)

வெளியில் (space) சுழலும். திண் சுழல் பற்றிய கொள்கையினை இங்கு காண்போம். இது இரண்டணுக்கள் தொகுதிகளாகிய இரட்டை அணு மூலக்கூறுகள் பற்றியும் (diatomic molecules) அவை வெளியிடும் நிறமாலைகளின் (spectra) கொள்கைப்பற்றியும் தெரிந்துகொள்ள சிறப்பாகப் பயன்படுத்தப் படுகின்றது. இரட்டை அணு மூலக் கூற்றினை, நாம் இரண்டு தனித்தனியான அணுக்களை நிலையான இணைப்பின் மூலம் (rigidly connected) இணைத்திருப்பதாகக் கொள்வோம். இவ்விரண்டு அணுக்களுக்கிடைப்பட்ட தூரத்தை R எனக் கொள்வோம். இங்கு நாம் மூலக்கூறின் வெளி (space) மற்றும் இடப்பெயர்ச்சி இயக்கம் (translational motion) பற்றிக் கருத்துச் செலுத்துவதில்லை. இந்த ஈரணு மூலக் கூறின் ஈர்ப்பு மையம் (centre of gravity) இங்கு பயன்படுத்தப்படும். ஆயத் தொலைத் தொகுதியின் மையத்தில் நிலைநிறுத்தப்பட்டுள்ளதாகக் கொள்வோம். ஓர் அணுவின் கோண ஆயத் தொலைகள் (polar co--ordinates) (a, θ, φ) எனக் கொள்வோம்.

இங்கு $a = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\ R$ எனக் கொள்வோம்.

m_1 மற்றும் m_2 என்பன இரண்டு அணுக்களின் பொருண்மைகள் மற்றும் ஓர் அணுவின் கோண ஆயத் தொலைகளை (b, θ, φ) எனக் கொள்வோம்.

$$b = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} R$$ எனக் கொள்வோம்.

முதல் துகள் (m_1) அல்லது அணுவின் இயக்க

$$\text{ஆற்றல்} = \frac{m_1}{2}\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2\right]$$

$$= \frac{m_1 a^2}{2}\left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] \quad \ldots(35)$$

இவ்வாறே இரண்டாவது துகள் (m_2) அல்லது அணுவின்

$$\text{இயக்க ஆற்றல்} = \frac{m_2 b^2}{2}\left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]$$

எனவே இரு துகள்களின் மொத்த இயக்க ஆற்றலை T எனக் கொள்வோம்.

$$T = \frac{m_1 a^2 + m_2 b^2}{2}\left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] \quad \ldots(36)$$

இப்போது. $m_1 \; a^2 + m_2 \; b^2 = I$ எனக் கொள்வோம். I என்பது நிலைமத் திருப்பு திறன் (moment of inertia) எனப்படும். எனவே மொத்த இயக்க ஆற்றலைக் கீழ்க்கண்டவாறு அமைக்கலாம்.

$$T = \frac{I}{2}\left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \sin^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] \quad \ldots(37)$$

இதனை I என்ற மதிப்புள்ள பொருண்மை கொண்ட துகள், ஓர் அலகு ஆரம் கொண்ட கோளப் பரப்பில் இயங்கும்போது கொண்டுள்ள ஆற்றலுக்குச் சமமாக இருக்கிறது எனலாம். லேப் லேசியன் ஆபரேட்டருக்கான (Laplacian operator) கோள ஆயத் தொலைகளில் உள்ள கோவையைப் பயன்படுத்தி மொத்த ஆற்ற லுக்கான ஹேமில்டோனியன் ஆபரேட்டரைக் (Hamiltonian operator) கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$H = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] + V \qquad \ldots(38)$$

திண் சுழலி மீது எந்த விசையும் செயல்படாத நிலையில் $V=0$ எனக் கொள்ளலாம். இங்கு நிலையாற்றல் சுழியாகக் கொள்ளப் பட்டுள்ளது. $r = 1$ எனவும், $mr^2 = m = 1$ எனவும் கொண்டு ஷ்ராடிங்கர் சமன்பாட்டினைப் பெறலாம்.

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{8\pi^2 IE}{h^2}\psi = 0 \qquad \ldots(39)$$

நாம் மீண்டும் ஒரு வகைக் கெழுச் சமன்பாட்டினைப் (differential equation) பெறுகிறோம். இச் சமன்பாட்டில் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட சாராமாறிகள் (independent variables) உள்ளன. எனவே இச் சமன்பாட்டிற்கான தீர்வு.

$\psi = \Theta(\theta)\ \Phi(\varphi)$ என இருக்கும்

இம் மதிப்பினைச் சமன்பாடு (39)-ல் பிரதியிடு செய்தால்

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right) + \frac{8\pi^2 IE}{h^2}\sin^2\theta = -\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} \qquad \ldots(41)$$

மாறிகளைப் பிரித்து (separation of variables) வகைப்படுத்தும் முறையினைப் பயன்படுத்தி மேற்கூறிய சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு

காணலாம். ஒவ்வொரு பக்கத்திலும் உள்ளவற்றை ஒரு மாறிலிக்கு (constant) ஒப்பானதாக்கலாம். அம் மாறிலியை m-க்குச் சமமாக இருப்பதாகக் கொள்வோம். எனவே நாம் இரண்டு வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைப் பெறுகிறோம்.

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = - m^2 \Phi \quad \text{...(42)}$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta}$$

$$\theta + \frac{8\pi^2 IE}{h^2} \theta E \theta \quad \text{...(43)}$$

சமன்பாடு எண் (42)க்கு, கீழ்க்கண்ட தீர்வு (solution) பொருந்துவதாக உள்ளது.

$$\Phi (\varphi) = c_s e^{\pm im\varphi} \quad \text{...(44)}$$

m ஆனது ஒரு முழு எண்ணாக இருந்தால், சமன்பாடு (44)ஆனது ஏற்றுக் கொள்ளத்தக்க அலை அணிக்கோவைகளைத் (wave function) தருவதாக அமையும் சமன்பாடு(42)க்கான நார்மலாக்கப் பட்ட தீர்வுகளைக் (normalized solution) கீழ்க்கண்டவாறு அமைக்கலாம்,

$$\Phi (\varphi) = \Phi_{\pm m} (\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\pm im\varphi} \quad \text{...(45)}$$

இங்கு $m = 0, 1, 2, 3$

சமன்பாடு (43)ல் உள்ள

$$\frac{8\pi^2 IE}{h^2} = l\,(l + 1) \text{ எனக் கொள்வோம்.}$$

பின்னர் அச் சமன்பாட்டை

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) - \frac{m^2 \theta}{\sin^2 \theta} + l\,(l + 1)\theta = 0 \quad \text{...(46)}$$

l ஆனது முழு எண் மதிப்பைப் பெறும்போது நாம் ஏற்றுக் கொள்ளத் தக்க தீர்வுகளைப் பெறலாம்.

அதாவது, $l \geq |m|$

எனவே சமன்பாடு எண் (46)க்கு ஏற்ற நார்மலாக்கப்பட்ட தீர்வுகளை

$$\theta(\theta) \equiv \theta_{l, \pm m}(\theta)$$

$$= \sqrt{\frac{2l+1}{2} \cdot \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\; P_l^{|m|} (\cos \theta) \quad \ldots(47)$$

1 க்கான பல நிபந்தனைகள் காரணமாக ஆற்றலுக்கான கோவையில் சில மதிப்புகளே பொருத்தமுடையனவாக அமையும் இவற்றைக் கீழ்க் கண்ட சூத்திரம் விவரிப்பதாகவுள்ளது.

$$E = \frac{h^2}{8\pi^2 I}\, l(l+1) \qquad l = 0, 1, 2, 3, \quad \ldots(48)$$

முழுமையான அலைக் கோவையை

$$\psi = \Theta_{e, \pm m}(\theta)\, \Phi_{\pm m}(\varphi) \equiv Y_{e, \pm m}(\theta, \varphi)$$

இவ்வாறு வெளிப்படுத்தலாம். மேலும் இவ்வலைக் கோவை கீழ்க் கண்ட இரு சமன்பாடுகளையும் ஒருங்கே நிறை செய்வதாக இருக்க வேண்டும்.

$$\left.\begin{aligned} M^2 Y_{l, \pm m} &= l(l+1) \frac{h^2}{4\pi^2} Y_{l, \pm m} \\ M_z Y_{l, \pm m} &= \pm m \frac{h}{2\pi} Y_{l, \pm m} \end{aligned}\right\} \quad \ldots(49)$$

இவை ஹேமில்டோனியனின் (Hamiltonian) ஐகன் சார்பலனாகஇருப்பதோடன்றி பிறவகையிலும் பயன்படுகின்றன. இந்த ஐகன் சார்பலன்கள் ஆற்றலுக்கான $E = \frac{h^2}{8\pi^2 I} l(l+1)$ ஐகன் மதிப்புக்களைக் கொண்டுள்ளன. மேற்கூறிய ஐகன் சார் பலன்கள் மொத்த சுழல் உந்தத்திற்கும் (total angular momentum) ஐகன் சார்பலனாகக் கீழ்க் கண்ட ஐகன் மதிப்புக்களைக் கொண்டுள்ளன. ஐகன் மதிப்புகள் $M^2 = l(l+1) \frac{h^2}{4\pi^2}$ மேலும் சுழல் உந்தத்தின் z–கூறுக்கான ஐகன் மதிப்புகளையும் $M_z = \pm m \frac{h}{2\pi}$ தருகின்றன. மேற்கூறிய அத்துணை மாறிகளும் (variables) ஒரே சமயத்தில் ஒரு மாறாத மதிப்பினைக் கொண்டிருக்கும் பொதுவாக, ஒரு தொகுதியை விவரிக்க இரண்டு ,ஆயக் கூறுகள் தேவைப்படுகின்றன, என்று

கொண்டால், இரண்டு இயங்குகின்ற மாறிகளுக்கு ஒரே சமயத்தில் ஐகன் மதிப்பு ஒன்றாக இருக்க வேண்டும் என நாம் எதிர்பார்க்கிறோம். ஆனால் இங்கு மூன்று மாறிகள் உள்ளன. ஏன் மூன்று மாறிகள் இருக்கின்றன என்ற காரணத்தைக் கீழ்க் கண்டவாறு விளக்கலாம். முது பழங் கொள்கையின்படி, ஆற்றலுக்கும் மொத்தச் சுழல் உந்தத்தின் இரு மடிக்கும் (square of the total angular momentum) ஒரு தொடர்பு உண்டு. அத் தொடர்பு $E = \frac{M^2}{2e}$ என்பதாகும். மேற்கொடுத்த ஐகன் மதிப்புகள் இதற்குப் பொருந்தி நிறைவு தருவனவாக உள்ளன என்பதையும் கருத்தில் கொள்ளல் வேண்டும்.

இவ்வாறு திண் சுழலியின் கொள்கை அலைவிசையியலில் விவரிக்கப்படுகிறது.

(e) ஹைட்ரஜன் அணு

ஹைட்ரஜன் அணு அமைப்பு எல்லா அணுக்களின் அமைப்புகளை விட எளிமையானது. இதனை முப்பரிமாண (three dimension) அமைப்பில் அமைத்து, ஷ்ராடிங்கரின் அலைச் சமன்பாட்டினை நேரடியாகப் பயன்படுத்தி விளக்கலாம். ஆனால் இதற்குப் புகுத்தப்படும் கணிதமுறை சிறிது சிக்கலானது. மேலும் நெடியதாகவும் உள்ளது. எனவே, இங்கு நாம் ஹைட்ரஜன் பற்றிய பலமுக்கியமான முடிவுகளைப் பற்றி மேலெழுந்த வாரியாகக் காண்போம்.

அணுவின் நடுவில் மையக் கரு (nucleus) உள்ளது. அதன் மின்னூட்டம் $= ze$ ஆகும். ஆனால் ஹைட்ரஜனுக்கு $z = 1$. எனவே மையக்கரு மின்னூட்டத்தால் தன்னைச் சுற்றி ஒரு மின்புலத்தைப் படைக்கிறது. இப்புலனில் உள்ள ஓர் எலெக்ட்ரானின் நிலையாற்றல் V எனக் கொள்வோம்.

$$V(r) = -\frac{ze^2}{r} \quad \ldots(50)$$

இங்கு $r = (x, y, z)$ ஆகும். மேலும் $z = 1$

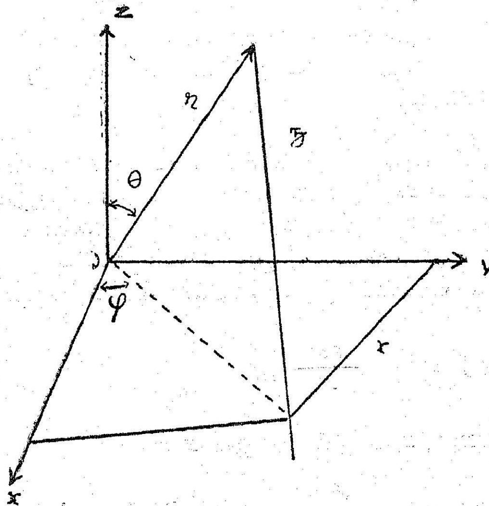
எனவே $V(r) = -\frac{e^2}{r}$ ஆகும். இதனை ஷ்ராடிங்கர் சமன்பாட்டில் பொருத்தினால்

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\Big[E - V(r)\Big]\psi = 0 \qquad \text{...(51)}$$

என்ற ஹைட்ரஜன் அணுவிற்கான சமன்பாட்டைப் பெறலாம்.

மேலும், நிலையாற்றல் ஆனது எலெக்ட்ரான் வட்டப் பாதையின்

ஆரத்தை $r = \sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$ பொருத்தே அமைகிறது. நிலையாற்றல் r–யின் திசையைப் பொருத்ததன்று. எனவே ஷ்ராடிங்கர் சமன்பாட்டை, கோள மற்றும் கோண தூர ஆயத் தொலைகளின் (r, θ, ϕ) வழியாகப் படைக்க வேண்டிய அவசியம் ஏற்படுகிறது. எனவே கீழ்க்கண்டவாறு (x, y, z) ஆயத் தொலைகளுக்கு ஒப்பான கோள மற்றும் கோண தூர ஆயத் தொலைகளைப் பயன்படுத்தி ஷ்ராடிங்கர் சமன்பாட்டைப் பெறலாம்.



படம் 39. கோள மற்றும் கோண தூர ஆயத்தொலைகள்

$$\left.\begin{array}{l} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{array}\right\} \quad ...(52)$$

இம் முறையில் ஷ்ராடிங்கர் சமன்பாட்டினைக் கீழ்க்கண்டவாறு பெறலாம்.

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left(E + \frac{e^2}{r}\right)\psi = 0 \quad ...(53)$$

இச் சமன்பாட்டில் $\frac{e^2}{r}$ என்பது கோள சமச்சீர் (spherically symmetrical) உள்ளதாகும். இச்சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு காண்போம். ψ-க்கு ஒரு தீர்வு இருக்குமாயின் அஃது r-ஐச் சார்ந்த சார்பலனாக இருக்கும். அஃது θ-வையோ φ யையோ சார்ந்த சார்பலனாக இருக்காது. எனவே மேற்கூறிய சமன்பாட்டில் r வரக்கூடிய கூறுகளை மட்டும் பயன்படுத்தி, சமன்பாட்டை மாற்றியமைக்கலாம்.

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left(E + \frac{e^2}{r}\right) \psi = 0 \quad ...(54)$$

அல்லது

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left(E + \frac{e^2}{r}\right) \psi = 0 \quad ...(55)$$

இச்சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு காணும் போது எல்லை நிபந்தனைகளைச் (boundary conditions) செயலாக்க வேண்டும்.

(i) எல்லாயிடங்களிலும் ϕ க்கான தீர்வு ஒரு மதிப்புடையதாகவும் முடிவுள்ளதாகவும் (single valued and finite) இருக்க வேண்டும்.

(ii) தீர்வானது தொடர்ச்சியுள்ளதாகவும் அதன் முதல் வகைக் கெழுக்கள் (first derivatives) தொடர்ச்சியுள்ளதாகவும் இருக்க வேண்டும்,

இதற்கிணங்க, அலைச் சமன்பாடு (55)-க்கு ஏற்ற எளிய தீர்வைக் காணலாம்.

$$\phi(r) = e^{-\alpha r} \qquad \ldots(56)$$

இங்கு α என்பது ஒரு மாறிலி ஆகும்.

இத் தீர்வானது நமது நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்வதாக அமைந்துள்ளது. அதாவது $r \to \alpha$ இப்பொழுது $\phi(r) \to 0$. அதாவது எலெக்ட்ரான் துகளானது மையக் கருவை விட்டு விலகி இயங்கிக் கொண்டேயுள்ளது என்பது தெளிவாகிறது.

ϕ-யின் வகையீடு காணின் (differentation)

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\alpha . e^{-\alpha r}$$

மற்றும் $$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \alpha^2 . e^{-\alpha r}$$

இவற்றைச் சமன்பாடு (55)-ல் பயன்படுத்துவோம்.

$$\alpha^2 e^{-\alpha r} - \frac{2\alpha}{r} e^{-\alpha r} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left(E + \frac{e^2}{r}\right) e^{-\alpha r} = 0 \qquad \ldots(57)$$

அல்லது,

$$\alpha^2 - \frac{2\alpha}{r} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left(E + \frac{e^2}{r}\right) = 0 \qquad \ldots(58)$$

இச் சமன்பாடு r-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் பொருந்தி தெளிவாகவுள்ளது. ஏனெனில் சமன்பாட்டில் ஒவ்வொரு கூறும் r-ன் மதிப்பைப் பொருத்தது அன்று.

எனவே,

$$a^2 + \frac{8\pi^2 m}{h^2} E = 0 \qquad ...(59)$$

மற்றும் $$-2a + \frac{8\pi^2 me^2}{h^2} = 0 \qquad ...(60)$$

$$\therefore \quad a = \frac{4\pi^2 me^2}{h^2} \qquad ...(61)$$

a என்ற மாறிலியின் மேற்கண்ட மதிப்பினைச் சமன்பாடு (59)-ல் பயன் படுத்தினால்,

$$\left(\frac{4\pi^2 m}{h^2}\right)^2 e^4 + \frac{8\pi^2 m}{h^2} E = 0 \qquad ...(62)$$

அல்லது

$$\left(\frac{4\pi^2 m}{h^2}\right)^2 e^4 = - \frac{8\pi^2 m}{h^2} E \qquad ...(63)$$

எனவே இங்கு எலெக்ட்ரானின் ஆற்றலுக்கான ஒரு சூத்திரத்தைப் பெறலாம்.

$$E = - \frac{2\pi^2 me^4}{h^2} \qquad ...(64)$$

இங்கு கண்ட முடிவும் போரின் கொள்கை (**Bohr's Theory**)-யின் படி ஹைட்ரஜன் அணுவிற்குப் பெற்ற முடிவும் ஒன்றாக இருப்பதைக் காணலாம். ஹைட்ரஜன் அணுவின் அடிநிலை (**ground state**) ஆற்றல், அதாவது n என்ற குவான்டம் எண் $= 1$ஆக இருக்கும்போது எலெக்ட்ரான் கொண்டுள்ள ஆற்றலின் அளவு E என்று சூத்திரத்தில் தரப்பட்டுள்ளது.

ஆனால் இம் முடிவானது துகளின் அலைப் பண்பை அடிப்படையாகக் கொண்டு கணிதவியல் ரீதியில் பெறப்பட்டுள்ளது என்பது குறிப்பிடத்தக்கதாகும். குவான்டம் விசையியலின்படி ஹைட்ரஜன் அணுவின் அடிநிலை கோளச் சீரமைப்பு பெற்றதாக உள்ளது. போர் அணு அமைப்பில் எலெக்ட்ரானின் சுற்றுப் பாதை ஒரே தளத்தில் வரையறுக்கப்படுவதால் இந்த அமைப்பு அணுவின் அடிநிலைக்கு இல்லை என்பது தெளிவாகிறது.

5. 6. ஹெய்ஸ்சன்பர்க் நிலையில்லாமைக் கோட்பாடு (The Uncertainty Principle)

ஹெய்ஸ்சன்பர்க் (Heisenberg) என்பார் அணிவிசையியலைத் (matrix mechanics) தோற்றுவித்தவர் ஆவார். இவரே நிலையில்லாமைக் கோட்பாட்டையும் உருவாக்கியுள்ளார்.

நாம் துகள் பற்றியும் அலைகள் பற்றியும் நல்ல அடிப்படை அறிவைப் பெற்றிருக்கிறோம். எல்லாப் பருப்பொருள் துகள்களுக்கும் (எலெக்ட்ரான், புரோட்டான், நியூட்ரான்) ஒரு தனி இயல்பு உள்ளதையும் நாம் அறிவோம். J. J. தாம்சன் என்பாரின் $\frac{e}{m}$ பற்றிய பரிசோதனையில் மின் மற்றும் காந்தப் புலனுக்கு உட்படுத்தப்பட்ட எலெக்ட்ரான் துகள் பண்போடு செயலாற்றுகிறது என்பது தெளிவாகும். ஆனால் G. P. தாம்சன் என்பாரின் எலெக்ட்ரான் விளிம்பு விளைவு (diffraction) பரிசோதனையில் எலெக்ட்ரான் அலைப் பண்போடு செயலாற்றுகிறது எனக் கண்டோம். ஓர் எலெக்ட்ரான் கதிர் வீச்சைப் (radiation) போன்று ஒருங்கே துகள் மற்றும் அலைப் பண்புகளை வெளிக்காட்ட இயலாது.

இத்தகைய அலை-துகள் இருமைப் பண்பு என்ற கருத்தினை ஒருங்கே மேற்கொள்வதில் சில இடையூறுகள் உள்ளன. அலை மற்றும் துகள் பற்றிய அறிவானது பெரிய அளவு தோற்றப் பாட்டினை, பெரிய அளவில் காட்சிப் பதிவு மற்றும் பரிசோதனைகளை அடிப்படையாகக்கொண்டு பெறப்பட்டதாகும். எடுத்துக்காட்டாக, ஓர் எலெக்ட்ரானை சில சமயங்களில் ஒரு அலையாகவோ பிறிதொரு சமயத்தில் ஒரு துகளாகவோ விவரிக்கப்படுவதாகக் கொள்வோம். இந்நிலையில் ஒரு வினா இயல்பாக எழ வழியுண்டு. ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்திலே வெளியிலே (space) ஓர் எலெக்ட்ரான் எங்கு இருக்கிறது என்று நிச்சயமாகக் கண்டு கொள்ள இயலுமா என்பதே அவ்வினாவாகும். இவ்வினாவிற்கான பதிலாக அமைவது தான் நிலையில்லாமைக் கோட்பாடு ஆகும். இக் கோட்பாட்டை 1927-ல் ஜெர்மனியைச் சேர்ந்த விஞ்ஞானி ஹெய்ஸ்சன்பர்க் என்பவர் படைத்தார். அவர் ஜெர்மன் மொழியில் இதனை "Unbestimmtheit" (uncertainty) நிலையில்லாமைக் கோட்பாடு அல்லது ஐயப்பாட்டுக்கொள்கை என அழைத்தார்.

நிலையில்லாமைக் கோட்பாடு

இக்கோட்பாட்டின்படி "ஒரு துகளின் இருப்பிடம் (position) மற்றும் உந்தம் (momentum) ஆகிய இரண்டையும் ஒருங்கே ஒரே சமயத்தில் துல்லியமாகக் கண்டறிய இயலாது" என்பது பெறப்படுகிறது. ஒரு பரிசோதனையை அமைத்து மேற்கூறிய இரண்டில் ஒன்றைத் துல்லியமாக அளந்தறிவோமானால் மற்றதைப் பற்றிய உண்மைநிலை நிலையில்லாது இருக்கும். எனவே ஒன்றைத் துல்லியமாக அளந்தறிய முயன்றால் மற்றொன்றில் பிழை ஏற்படலாம். எனவே ஒரு பரிசோதனை மூலம் இரண்டையும் ஒருங்கே அளந்தறியலாம். ஆனால் இந்த அளவுகள் ஒரு குறிப்பிட்ட துல்லிய எல்லைக்குட்பட்டே (ஓரளவு பிழையுடன்) இருக்கும். இந்த எல்லைகளைக் கீழ்க்கண்ட தொடர்பு மூலம் வெளிப்படுத்தலாம்,

$$\Delta x \, \Delta P \approx h \qquad \ldots\ldots(1)$$

Δx என்பது துகளின் இருப்பிடத்தை அளந்தறியும்போது ஏற்படுகின்ற பிழை (error) ஆகும். ΔP என்பது அத்துகளின் உந்தத்தைக் கண்டறியும்போது ஏற்படுகின்ற பிழையாகும், இவ்விரு பிழைகளின் பெருக்குத் தொகை ப்ளாங்க் மாறிலியின் மதிப்பிற்கு ஓரளவு சமமானதாக இருக்கும்.

எனவே, நாம் x ஆயத்தில் ஒரு பொருளின் இருப்பிடத்தைக் கண்டறிவதில் ஏற்படுகின்ற பிழையை (Δx) மட்டும் குறைக்க எண்ணினால், அதனைச் செய்ய முடியும். ஆனால் அதே சமயத்தில் அப் பொருளின் உந்தத்தைக் (P) கண்டுபிடிப்பதில் பிழை அதிகமாக இருக்கும். Pஐத் துல்லியமாகக் காணும்போது Δx-யின் மதிப்பு ~~அதிகரிக்கும்~~, குறையும்

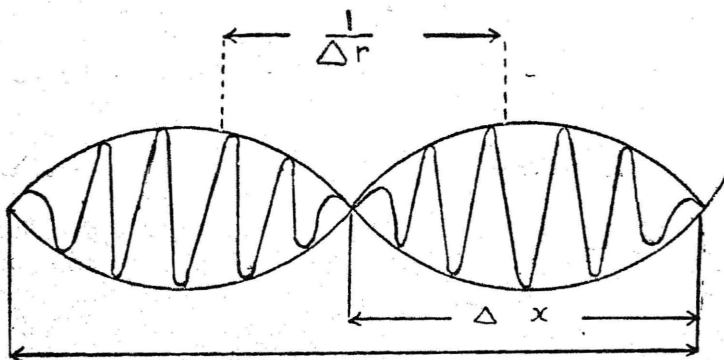
இதைப் போன்றே மற்றொரு தொடர்பையும் அமைக்கலாம்.

$$\Delta E . \Delta t \approx F \qquad (2)$$

இங்கு மிகத் துல்லியமாக எக் கணத்தில் அணு ஓர் நிகழ்ச்சி (atomic event) நடைபெறுகிறது என்று கண்டறிந்தால், மிகக் குறைந்த துல்லியமாக அணுத் தொகுதியில் ஏற்படுகின்ற ஆற்றல் மாற்றத்தைக் கண்டறியலாம். ΔE என்பது ஆற்றலை அறியும்போது ஏற்படுகின்ற பிழை. Δt என்பது அணு நிகழ்ச்சி நடைபெறும் கணத்தில் ஏற்படுகின்ற பிழை.

நிலையில்லாமைக் கோட்பாட்டிற்கான எளிதான நிருபணம்

அலைக் கண்ணோட்டத்தோடு நோக்கும்போது, ஒரு இயங்கும் துகளை ஒரு சிறிய அலைக் குழுவாகவோ அல்லது அலைப் பெட்டக மாகவோ (packet of waves) கொள்ளலாம். இதன்படி ஒரு துகளின் சரியான இருப்பிடத்தைச் (exact position) சரியாகக் கொண்டு சொல்ல இயலாது. ஆனால் துகளானது அலைப் பெட்டகத்தில் (wave packet) எங்கேயாவது ஒரு புள்ளியில் ஒரு குறிப்பிட்ட எல்லைகொண்ட தூரத்தில் (Δx) x ஆயக் கூறில் இருக்கலாம் என்றே கூற இயலும்.



படம் 40. குழு அலைகளின் (அலைப் பெட்டகம்) நீளம் அதில் உள்ள அலை எண்களின் நெடுக்கம் (range) ஆகியவற்றிற்கான தொடர்பு

மாறுபாடு கொண்டுள்ள வீச்சுடைய இரண்டு குழு அலைகளைக் கீழ்க் கண்டவாறு அமைக்கலாம்,

$$y = a \sin 2\pi \left(\gamma t - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$y' = a \sin 2\pi \left(\gamma' t - \frac{x}{\lambda'} \right)$$

இவை இரண்டு அலைகள். மாறுபடும் வீச்சுள்ள இரண்டு முழு அலைகளுக்கேற்ப,

$$2\, a \cos 2\pi \left[\frac{(\gamma - \gamma')}{2} t - \frac{x}{2} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) \right] \qquad ...(3)$$

சமன்பாடு (3)-ஐ அமைக்கலாம்.

அலைப் பெட்டகத்தின் நீளம் (Δx) குறைவாக இருப்பதாகக் கொண்டால்

$\gamma - \gamma' = \Delta \gamma$ (அதிர்வு எண்ணில் மாற்றம்) மற்றும்,

$$\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} = \overline{\gamma} - \overline{\gamma'} = \Delta \gamma \text{ (அலை எண்ணில் மாற்றம்)}$$

என்றும் கொள்ளலாம்.

எனவே, மாறுபடும் வீச்சு $= 2a \cos 2\pi \left[\frac{\Delta \gamma t}{2} - x \frac{\Delta \overline{\gamma}}{2}\right]$

அலைக் குழுவின் நீளம் Δx என்பது இரு அடுத்தடுத்த நிலைகளுக்கிடைப்பட்ட தூரமாகும். இப் புள்ளிகளில் வீச்சு சுழி யாக இருக்கும் (படம் 40) இவ்விடைவெளியானது π என்ற அளவு கோண மாற்றத்திற்கு ஒப்பானதாகும். எனவே

$$\cos 2\pi \left[\frac{\Delta \gamma t}{2} - \frac{\Delta \overline{\gamma} (x + \Delta x)}{2}\right] = \cos$$

$$\left[2\pi \left(\frac{\Delta \gamma t}{2} - \frac{\Delta \overline{\gamma} \cdot x}{2}\right) - \pi\right]$$

$$\therefore \frac{2\pi \overline{\Delta \gamma} \Delta x}{2} = \pi$$

அல்லது $$\Delta x = \frac{1}{\Delta \overline{\gamma}} \qquad ...(4)$$

நாம், இரண்டு அலைகளின் சேர்வுக்குத் தடை விதிக்கவில்லை யானால், ஒரு தொடர்புள்ள நிறமாலை அதிர்வெண்களைப் பெறு வோம். இவ்வதிர் வெண்கள் $\Delta \gamma$ என்ற இடைவெளியில் அமையும். நன்கு அலசி ஆராய்ந்தால் ஒரு பெட்டகத்தின் (wave packet)

$$\Delta x = \frac{1}{2\pi \overline{\gamma}} \text{ என அமையும்} \qquad ...(5)$$

இப்போது அலைவிசையியலின்படி

$$\overline{\gamma} = \frac{1}{\lambda} = \frac{mv}{h} = \frac{Px}{h} \qquad ...(6)$$

என அமையும். மேலும் Px என்பது துகளின் x ஆயத் திசையைச் சார்ந்த உந்தமாகும்.

$$\therefore \quad Px = h\bar{\gamma} \qquad \ldots(7)$$

$$\therefore \quad \Delta Px = \Delta \bar{\gamma} h$$

அல்லது $$\frac{\Delta Px}{\Delta \bar{\gamma}} = h$$

அல்லது $$\Delta Px. \ \Delta x \simeq h$$

எனவே, இம்முடிவின்படி ஒரு துகளின் இருப்பிடத்தையும், அதன் உந்தத்தையும் ஏக காலத்தில் மிக உயர்ந்த அளவு துல்லியமாகக் கண்டறிவது என்பது முடியாத செயலாகும். நிலையில்லாமைக் கோட்பாட்டினைக் கூறுவதில் இது ஒரு கூற்றாக அமையும்,

ஆனால் v என்ற திசை வேகத்தில் இயங்கும் ஒரு துகளை நாம் Δx என்ற தூரத்திலே கண்டுகொள்ள இயலும் என்று கொண்டால், அதன் காலம் பற்றிய ஆயக் கூறில் நிலையில்லாமைத் தன்மையின் அளவு Δt ஆக அமையும்.

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v}$$

அத்துகளின் இயக்க ஆற்றல் (kinetic energy) E எனக் கொண்டால்,

$$E = \tfrac{1}{2} m v^2$$

$$\Delta E = m v. \ \Delta v = v \Delta v m$$

அல்லது $$\Delta \approx = v. \ \Delta P = v. \ \frac{h}{\Delta x} \qquad \ldots(8)$$

அல்லது $$\approx \frac{h}{\Delta t}$$

$$\therefore \quad \Delta E. \ \Delta t \approx h$$

எனவே, இத் துகளின் ஆற்றலை மிகத் துல்லியமாகவும், சரியாவும் அளக்க இயலாது. அப்படி அறிவதாக இருக்கும்

நிலையில் அதனை அளந்தறிய நமக்கு முடிவில்லாத காலம் (infinte time) தேவைப்படுவதாக இருக்கும். ஏனெனில் h என்ற ப்ளாங்க்கின் மாறிலி ஒரு சிறிய கணியமாகும் ($h = 6.625 + 10^{-27}$) எனவே நிலையில்லாமைத் தன்மையானது பேரளவு நிலையில் (macroscopic state) நடைபெறும் பரிசோதனைப் பிழையில் (experimental error) மறைந்தொழியும். ஆனல் இதன் விளைவு நுண்ணிய அணு நிலையில் (microscopie atomic state) தெளிவாகத் தென்படும்.

நிலையில்லாமைக் கோட்பாட்டிற்கான பரிசோதனை விளக்கம்:-
(Experimental illustration of uncertainty principle)

(i) **துகளின் இருப்பிடம் காணுதல்: γ காமாக் கதிர் நுண்ணோக்கி (γ-ray Microscope)**

நாம் இப்போது ஒரு துகளின் இருப்பிடத்தைக் (position) கண்டறியும் சோதனையைக் காண்போம், எடுத்துக்காட்டாக, ஓர் எலெக்ட்ரானின் இருப்பிடத்தை அளந்து கண்டறிவோம். இத்தகைய சோதனை முதல் முதலாக ஹெய்ஸ்சன்பர்க்என்பவரால் r-கதிர் நுண்ணோக்கியைப் பயன்படுத்தி விவாதிக்கப்பட்டது.

ஒரு நுண்ணோக்கியின் (microscope) பகுதிறனைக் (resolving power) கீழுள்ள தொடர்மூலம்அமைக்கலாம்.

$$S = \frac{\lambda}{2 \sin\theta} \approx \frac{f\lambda}{D} \qquad \ldots(9)$$

இங்கு S என்பது பார்வைப் புலத்திலே (field of view) இரு புள்ளிகளைத் தனித் தனியாக இனங்கண்டு கொள்ள முடியும், நிலையில் உள்ள மிகக் குறைந்த இடைப்பட்ட தூரமாகும்.

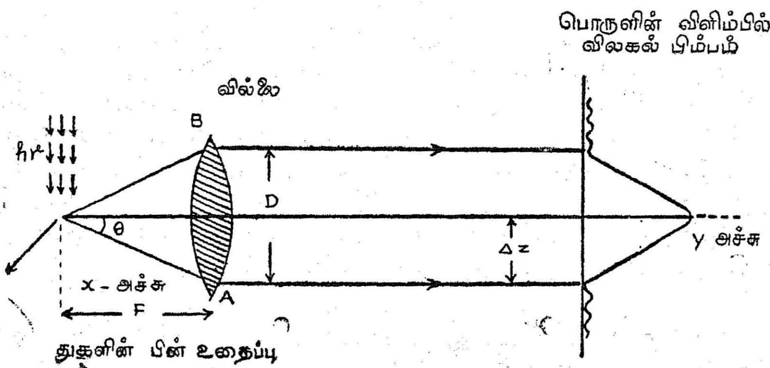
λ என்பது பொருளைக் காண உதவும் ஒளிமிகு கதிர்களின் அலை நீளமாகும்.

θ என்பது கூம்பு வடிவக் கதிர்கள் (cone of rays) அரை செங்குத்துக் கோணமாகும் (semivertical angle). இக் கதிர்கள் நுண்ணோக்கியின் பொருளருகு வில்லைக்குப் (objective) பொருளிலிருந்து (துகள்) (particle) செல்வதாகும்.

D என்பது நுண்ணோக்கியின் பொருளருகு (objective) வில்லையின் விட்டமாகும்.

f என்பது பொருளருகு வில்லையின் குவியத் தூரமாகும் (**focal length**).

அகலமான துளை (aperture) கொண்ட நுண்ணோக்கியையும் குறைந்த அளவு அலை நீளம் கொண்ட கதிரையும் 'கொண்டு அதிகமான பகுதிறனைப் (resolving power) பெறலாம். பொருளாக அமையும் எலெக்ட்ரான் மீது சலனம் குறைவாக இருத்தல் பொருட்டு, அதாவது துகளின் பின் உதைப்பு (recoil) குறைவாக இருப்பதற்காக ஒளிச் செறிவு குறைவான ஒளியினைப் பயன்படுத்த வேண்டியுள்ளது. ஆதலினால் ஒரே ஒரு ஒளி ஃபோட்டான் (photon) மட்டுமே பயன்படுத்தப்பட வேண்டும். பரிசோதனை அமைப்பைப் படம் 41 விளக்குகிறது.



படம் 41. காமக் கதிர் நுண்ணோக்கி

பலம் குறைந்த ஒளியானது அதிக ஃபோட்டான் ஆற்றலுடன் ($h\gamma$) துகளின் மீது விழுகிறது. ஃபோட்டான் சிதறடிக்கப்பட்டு நுண்ணோக்கியுனுள் நுழைகிறது. பின்னர் விளிம்பு விளைவுப் பாங்கத்தின் (diffraction pattern) ஒரு புள்ளியை அடைகிறது. ஃபோட்டானின் தாக்குதலுக்குட்பட்ட எலெக்ட்ரான் பின் உதைப்புக்கு (recoil) உட்படுகிறது. இது தன் இருப்பிடத்தைவிட்டு ஏதாவது ஒரு திசையில், படத்தில் காட்டியபடி இயங்குகிறது. இந்நிலையில், நாம் துகளின் இருப்பிடத்தை எவ்வளவு துல்லியமாக இச் சோதனையால் கண்டறிய முடியும் என்பதையும் துகளின் இயக்கத்தில் என்ன நிலையில்லாமைத் தன்மை உள்ளது என்பதையும் காண்போம்.

முதலாவதாக, எலெக்ட்ரானின் இருப்பிடம் தோராயமாகவே (approximately) தெரிய வருகிறது. ஏனென்றால், விளிம்பு விலகல் பாங்கத்தில் சரியாக எந்தப் புள்ளியில் தனித்த ஒரு ஃபோட்டான் சென்று அடைகிறது என்பதைத் துல்லியமாகக் கூற இயலாது. நாம் சரியாகச் சொல்ல வேண்டுமெனின் அந்த ஃபோட்டான் ஆனது ஓரளவு உறுதியாக விளிம்பு விலகல் பாங்கத்தின் முதல் வளையத்தில் சென்று சேரலாம் என்று கூறலாம். ஆதலினால், நாம் கற்பனையாகக் குறைந்த அளவு தத்துவார்த்தமாக இந் நிலையில்லாமையின் அளவினை Δx-க்குச் சமமானது என்று கூறலாம்.

$$\text{எனவே,} \quad \Delta S = S = \frac{f\lambda}{D} \qquad \ldots(10)$$

இரண்டாவதாக, எலெக்ட்ரானின் இருப்பிடத்தைக் கண்டு பிடிக்கும் முயற்சியில் நாம் எலெக்ட்ரானின் மீது ஃபோட்டானை மோதவிடுகிறோம். எனவே எலெக்ட்ரான் பின் உதைப்புக்கு உட்பட்டு தெரியாத அளவு தூரம் செல்கிறது. இது முற்றிலும் உண்மை. மேலும் நாம் ஃபோட்டான் எப்பாதையில் சென்று நுண்ணோக்கியின் பொருளருகு வில்லையின் எப் புள்ளியில் பட்டுச் சென்றது என்று திட்டவட்டமாகச் சொல்லவும் இயலாது. அதாவது, $\frac{h\gamma}{C}$ என்ற உந்தமுடைய ஃபோட்டான் பொருளருகு வில்லையில் OA-க்கும் OB-க்கும் இடைப்பட்ட எவ்வழியாகவும் சென்றிருக்கலாம்.

ஃபோட்டான் OA-யின் வழியாகச் செல்வதாகக் கொள்வோம். பின்னர்

$$x \text{ அச்சியின் வழியாக உந்தம்} = \frac{h\gamma}{c}\sin\theta$$

$$= \frac{h\gamma\theta}{c}$$

$\because$ θ என்ற கோணம் சிறியதாகவுள்ளதால் $\sin\theta = \theta$

$\therefore$ துகளுக்கு x-அச்சின் திசையில் ஏற்பட்ட

$$\text{உந்தம்} = \frac{h\gamma}{c} - \frac{h\gamma\theta}{c} \qquad \ldots(11)$$

சிதறிய ஃபோட்டான் OB வழியாகச் செல்வதாகக் கொண்டால்,

$$\left.\begin{array}{r}\text{துகளுக்கு } x\text{-அச்சின்} \\ \text{திசையில் ஏற்பட்ட உந்தம்}\end{array}\right\} = \frac{h\gamma}{c} + \frac{h\gamma\theta}{c} \qquad \ldots(12)$$

ஆதலினால், துகளுக்கு ஏற்பட்ட உந்தத்தின் மதிப்பு மேற்கூறிய இரண்டு சமன்பாடுகள் கொடுக்கும் மதிப்பிற்கு இடைப்பட்டதாக அமையும்.

துகளுக்குக் கொடுக்கப்பட்ட பின் உதைப்பு உந்தத்தில் நிலையில்லாமல் உள்ள அளவு

$$\Delta Px = \frac{2h\gamma\,\theta}{c} \qquad \ldots(13)$$

$$\therefore \quad \frac{\gamma}{c} = \frac{1}{\lambda} \quad \text{மற்றும் } \theta = \frac{D}{2f}$$

$$\therefore \quad \Delta Px = \frac{h}{\lambda}\ \frac{D}{f} \qquad \ldots(14)$$

$$\text{ஆதலினால், } \Delta Px\ \ \Delta x = \frac{h}{\lambda}\ \frac{D}{f}\ \frac{f\lambda}{D} = h \qquad \ldots(15)$$

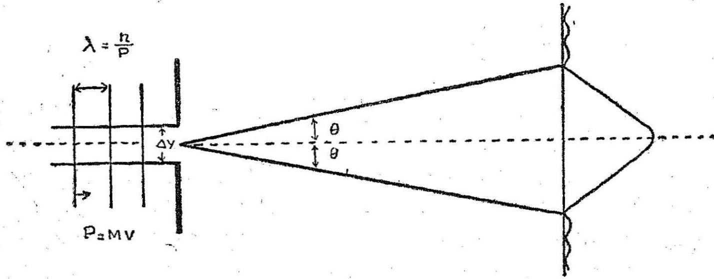
சமன்பாடு எண் (15) ஆனது ஹெய்ஸ்சன்பர்க்கின் நிலையில்லாமைக் கோட்பாடு ஆகும்.

இப்போது இரண்டு நிலையில்லாமைக் கணியங்களையும் ஒப்பீட்டு நோக்கும்போது சில உண்மைகள் புலப்படுகின்றன. அக்கணியங்களில், ஒளியின் அலை நீளம் (λ) மற்றும் நுண்ணோக்கியின் பரிமாணம் (D) ஆகிய இரண்டும் தலை கீழான தொடர்பினைப் பெற்று அமைந்துள்ளன என்பது தெளிவாகும். நாம் நுண்ணோக்கியின் பகுதிறனைச் (resolving power) சீராக அதிகரிக்க (Δx ஐக் குறைக்க)—அதன் துணையினை D (aperture) அதிகரிக்க வேண்டும். ஆனால் இவ்வாறு செய்வோமாயின் ΔPயும் அதிகரிக்கிறது. எனவே அலை நீளம் (λ)ஐ குறைக்கும்போது நுண்ணோக்கியின் பகுதிறன் அதிகரிக்கிறது. அதே சமயத்தில்

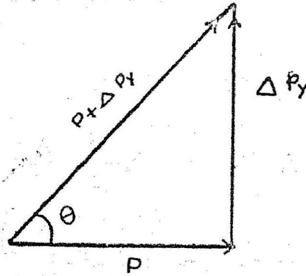
இதற்கேற்ப அதிக அளவு உந்தமான ஃபோட்டானில் இருந்து பின் உதைப்புக்கு ஆட்படும் துகளுக்குக் செல்கிறது.

பிளவின் வழி விளிம்பில் விலகல் (Diffraction by a Slit):

P என்ற உந்தமுடைய எலெக்ட்ரான் கற்றையானது Δy என்ற அகலமுள்ள பிளவின் (slit) வழியாகப் பாய்வதாகக் கொள்வோம். இந்தக் கற்றையை பல அலைகள் கொண்ட தொடருக்கு (series of waves) ஒப்பானதாகக் கொள்ளலாம். அவ்வலைகள் பிளவின்மீது விழுகின்றன. இவற்றின் அலைநீளம் $\lambda = \frac{h}{p}$ ஆகும்.



படம் 42 (a). ஒரு துளை விளிம்பு விலகல் விளைவினால் ஒரு ஃபோட்டானின் உந்தத்தில் ஏற்படும் நிலையில்லாமை



படம் 42 (b).

எலெக்ட்ரான் பிளவு வழியே செல்ல வேண்டியுள்ளது. எனவே பிளவில் எலெக்ட்ரான் எந்த இடத்தில் உள்ளது என்பதைக் கண்டறியலாம், y என்ற அளவு துல்லியமாக அதன் இருப்பிடத்தைக் கண்டறியலாம். Δy என்ற கணியத்தின் அளவு குறையக் குறைய நாம் எலெக்ட்ரானின் இருப்பிடத்தை மேலும் துல்லியமாகக் கண்டறியலாம். விளிம்பு விலகல் விளைவு ஏற்படு

கிறது. விளிம்பு விலகல் பாங்கம் (diffraction pattern) திசையின் மீது விழுகிறது. இதன் அமைப்பைப படத்தில் காணலாம். மேலும் ஈண்டு ஒரு தற்கோளை (assumption) பயன்படுத்துவதன் மூலம் கிடைக்கப் பெற்ற விளிம்பு விலகல் பாங்கத்தினை ஃபிரன் ஹோஃபர் விளிம்பு விளைவுப் பாங்கம் (Fraunhofer diffraction pattern) என்று சொல்லலாம். பிளவின் அகலம் மிகவும் குறைவாக உள்ளது. இதனை நோக்கின் திரையானது மிகுந்து தொலைவு தூரத்தில் உள்ளதாகக் கொள்ளலாம். திரையில் காணப்படும் நடுப் பெருமத்திற்கான (central maximum) கோண அகலத்தை (angular width) கீழுள்ள தொடர்பு மூலம் அமைக்கலாம்.

$$\sin\theta \quad \frac{\lambda}{\Delta Y} \qquad \ldots(16)$$

ஆதலினால் எலெக்ட்ரான் $\pm\theta$ என்ற கோண வரம்பில் எங்கு வேண்டுமானாலும் இயங்கிக் கொண்டு இருக்கலாம், எலெக்ட்ரானை நடுப் பெருமத்திற்கு வெளியே காணக்கூடிய வாய்ப்பானது (chance) மிகவும் குறைவாகும். நடுப்பெருமத்திற்கு இரு புறங்களிலும் துணைப் பெருமங்கள் (secondary maxima) உள்ளன. எலெக்ட்ரானை வெளியே காணக்கூடிய வாய்ப்பினை இத் துணைப் பெருமங்கள் கொடுப்பதாக அமையும். மேலும் திசை வரிப்படம் (vector diagram) ஒன்றும் காட்டப்பட்டுள்ளது.

P என்ற அளவு உந்தத்திலுள்ள நிலையில்லாமைத் தன்மையின் அளவு ΔPy ஆகும்.

$$\therefore\ \Delta\ Py = P\sin\theta \qquad \ldots(17)$$

அல்லது $\Delta\ Pv = P.\dfrac{\lambda}{\Delta y}$ (சமன்பாடு 16 லிருந்து)

அல்லது $\Delta\ Py.\ \Delta y = P,\ \dfrac{\lambda}{y} = P\lambda$

ஆனால் $P = \dfrac{h}{\lambda}$ ஆகும்.

$$\therefore\ \Delta P.\ \Delta y = h \qquad \ldots(18)$$

சமன்பாடு எண் (18) ஹெய்ஸ்சன்பர்க்கின் நிலையில்லாமைக் கோட்பாட்டின் கணிதவியல் சமன்பாடு ஆகும்,

எனவே ஒரு துகளின் உந்தம் மற்றும் இருப்பிடத்தைக் கண்டறியும் நிலையில் நிலையில்லாமைக் கோட்பாட்டினைக் கீழ் வருமாறு சொல்லலாம்.

பொருளின் உந்தத்தைக் கண்டறியும்போது ஏற்படும் நிலையில்லாமைக் கணியம் ΔPy என்றும், அதன் இருப்பிடத்தைக் கண்டறியும்போது ஏற்படும் நிலையில்லாமைக் கணியம் Δy என்றும் கொள்ளலாம். இவ்விரண்டின் பெருக்கற் பலனானது ப்ளாங்க்கின் மாறிலிக்குச் (h) சமமாகும். மேலும், பிளவின் அகலத்தை (Δy) மிகவும் குறைத்தால், விளிம்பு வளைவுப் பாங்கமானது மிகவும் அகலமுடையதாகிறது. எனவே எலெக்ட்ரானின் உந்தத்தைக் கண்டறியும்போது ஏற்படுகின்ற நிலையில்லாமைக் கணியத்தின் அளவு அதிகரிக்கிறது என்பதையும் நாமறிவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

ஓர் எலெக்டரானின் இருப்பிடத்தைக் கண்டறியும்போது ஏற்படக்கூடிய மிகக் குறைந்த அளவு நிலையில்லாமைக் கணியத்தைக் கணக்கிட்டுக் காண்க. தீர்வு : மிகக் குறைந்த அளவு நிலையில்லாமைக் கணியத்தை $(\Delta x)_{Min}$ என்று கொள்வோம். இதே சமயத்தில் மிக அதிக அளவு துகள் உந்தத்திற்கான நிலையில்லாமைக் கணியத்தில் மிக அதிக அளவு துகள் உந்தத்திற்கான நிலை நிலையில்லாமைக் கணியத்தில் $(\Delta P)_{Max}$ ஏற்படுகின்றது.

ΔP-யின் அதிக அளவு P என்ற உந்தத்தின் அளவிற்கு மேலாக இருக்க இயலாது.

எனவே,

$$(\Delta P)_{Max} = P$$

$$\therefore \ (\Delta P)_{Min} = \frac{h}{(\Delta P)_{Max}} = \frac{h}{P}$$

ஆனல் P யானது mcஐ விடக் குறைவாகவே இருக்க வேண்டும். ஏனெனில் எப்பொருளும் ஒளியின் திசை வேகத்திற்குக் குறைவாகத்தான் இயங்க வேண்டும்.

ஆதலினல் $(\Delta x) \geq \frac{h}{mc}$

அல்லது $\Delta x = \frac{h}{m_0 c} \times \frac{m_0}{m}$

இங்கு $\frac{h}{m_0 c} = \lambda c$ ஆகும்.

λc என்பது எலெக்ட்ரானின் காம்ப்டன் அலை நீளமாகும் (Compton wavelength)

$$\text{மற்றும் } \frac{m_0}{m} = \left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore (\Delta x)_{Min} = \lambda c\left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= .0243 \mathring{A} \left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

மேலும் $v = \frac{c}{10}$ எனத் தோராயமாகக் கொண்டால்,

$$(\Delta x)_{Min} = 0.0243\left[1 - \frac{1}{100}\right]^{\frac{1}{2}} \mathring{A}$$

$$= 0.0241 \mathring{A}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

ஒரு மூலக் கூறு வெப்பத்தின் ஆற்றல் பெற்று எளிய சீரிசை இயக்கத்தோடு (Simple Harmonic Motion) உள்ளது. இம்மூல கூறுடன் இணைந்துள்ள சிறும ஆற்றலைக் (lowest energy) கணக்கிட்டறிக.

இத்தகைய அலைவின் வீச்சு$=x_0$ எனக் கொள்வோம். ஆதலினால் இத் துகளின் இருப்பிடத்தைக் கண்டறியும்போது ஏற்படக்கூடிய நிலையில்லாமைக் கணியத்தின் அளவு x_0ஐவிட அதிகமாக இருக்க இயலாது.

எனவே, $(\Delta x)_{Max} = x_0$

இதற்கு இணையான சிறும உந்தத்தின் நிலையில்லாமைக் கணியம் $= \Delta P$

$$(\Delta P)_{Mini} = \frac{h}{(\Delta x)_{Max}}$$

$$\text{அல்லது } (\Delta P)_{Mini} = \frac{h}{x} \quad \text{...(i)}$$

மேலும் அதிர்ந்து கொண்டிருக்கும் மூலக் கூற்றின் உந்தமானது (ΔP) *Mini* ஐ விடக் குறைவாக இருக்க இயலாது. இம்மதிப்பு P-யின் சிறும மதிப்பாகும்.

$$P_{mini} = (\Delta P)_{Min} = \frac{h}{x_0}$$

$$\therefore \quad E_{Min} = \frac{P^2 mini}{2m}$$

$$= \frac{h^2}{2mx_0^2} \qquad ...(ii)$$

ஆனால் ஒரு துகள் எளிய சீரிசை இயக்கத்தோடு இருப்பின் அதன் ஆற்றல்

$$E = E_{Min} = 2\pi^2 m f^2 x_0^2 \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு f என்பது அலையின் அதிர்வு எண் ஆகும். சமன்பாடுகள் (i) மற்றும் (ii) யைப் பெருக்கினால் நமக்குக் கீழுள்ள சமன்பாடு கிடைக்கும்.

$$E^2 mini = \frac{h^2}{4mx_0^2} \times 2\pi^2 m \; f^2 x_0^2$$

$$= \pi^2 h^2 f^2$$

$$\therefore \quad E_{Min} = \pi h f$$

பயிற்சி

(1) (a) ஒரு துகளுக்கான ஷ்ராடிங்கரின் அலைச் சமன் பாட்டை அமைத்து அதன் பண்புகளை விளக்கவும்.

(b) கட்டின்மைத் துகளுக்கான ஷ்ராடிங்கர் சமன் பாட்டினை அமைக்கவும்.

(2) பெட்டகத்தில் உள்ள துகளுக்கான ஷ்ராடிங்கர் அலைச் சமன்பாட்டினை நிறுவி, அதன் ஆற்றல் நிலைகளையும் அலைச் சார் பலன்களையும் கண்டு வரைபடம் மூலம் விளக்கவும்.

(3) (a) ஒரு பரிமாண நேரியல் சீரிசை அலைவியற்றின் ஆற்றல் நிலை, சூழிப் புள்ளி ஆற்றல் ஆகியவற்றை விளக்குக.

(b) ஒப்புமைத் தத்துவம் என்றால் என்ன?

(4) (a) சுழல் உந்தங்களுக்கான பரிமாற்று விதியை விளக்கவும்.

(b) மொத்தச் சுழல் உந்தத்திற்கான கோவையை, கோள ஆயத் தொலைகள் மூலம் காண்க.

(5) திண் சுழலி பற்றிய கொள்கையை விளக்கவும்.

(6) ஹைட்ரஜன் அணுவிற்கான அலைச் சமன்பாட்டினை நிறுவி, அதன் ஆற்றலுக்கான கோவையைப் பெறவும்.

(7) நிலையில்லாமைக் கொள்கை, என்றால் என்ன? இதற்கான ஒரு பரிசோதனையை விவரிக்கவும்.

(3) சிறு குறிப்பு வரைக :

(a) ஆபரேட்டர்

(b) ஐகன் மதிப்பு மற்றும் சார்பலன்

(c) எதிர் நோக்கும் மதிப்பு

(d) நார்மலாக்கப்படும் நிபந்தனை

(e) ψ என்ற அலைச் சார்பலனின் விளக்கம்.

(f) நேரியல் ஆபரேட்டர்

(g) பரிமாற்று விதி

(h) புழல் விளைவு (Tunnel effect)

6. குவாண்டம் விசையியல்

6-1. குவாண்டம் விசையியல் (அணி விசையியல்) உருவாக்கம் (Formulation)

(a) அணிவகைக் குறிப்பு (Matrix Representation)

குவாண்டம் விசையியலில் தொடக்க நிலைப் பகுதி முதுபழங் கொள்கையாக (semi classical) இருந்தது. இதனைப் பிறப்பித்த பெருமை போர் அவர்களையே சாரும். குவாண்டம் விசையியல் பற்றிய பகுதியில் முதுபழங் கோட்பாட்டினையும் போரின் அடிப்படைக் கருத்துக்களையும் காணலாம். அவையாவன : (i) தனித் தனியான நிலையான நிலைகளின் கணம் (discrete set of stationary states) ஆனது, ஆற்றல் E_nன் மதிப்பால் சிறப்புத் தன்மை கொண்டுள்ளது. (ii) m நிலையில் இருந்து n நிலைக்குப் பெயற்சி ஏற்படும்போது வெளியேற்றப்படும் கதிர் வீச்சின் அதிர்வு எண் போரின் அதிர்வு எண் தொடர்பால் (Bohr's frequency relation) $\gamma = \frac{(E_m - E_n)}{h}$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. (iii) சுழல் உந்தத்திற்கான (angular momentum) குவாண்டம் நிபந்தனையானது (quantum condition) $\oint P_\phi dq = nh$ ஆகும்.

(iv) நிலையான நிலைகளுக்கிடையே ஏற்படுகின்ற இயக்கங்களையே, முதுபழங் கொள்கையில் உள்ள விசையியல் விதிகளாலும் மற்றும் மின் இயக்க வியலாலும் விவரிக்க இயலும். இவற்றால் ஒரு நிலையிலிருந்து மறு நிலைக்குப் பெயரும் தோற்றப்பாடுகளை விவரிக்க இயலாது. இவை முக்கிய தற்கோள்களாக உள்ளன.

(v) ஒப்புமைத் தத்துவம் (Correspondence Principle)

இக் கோட்பாடு முதுபழங் கொள்கையின் முடிவுகள் குவாண்டம் விசையியலோடு தொடர்பு கொள்ள உதவும். அதிகக் குவாண்டம் எண் கொண்ட தொகுதிகளின் முடிவுகள் எல்லை வகைக்குட்பட்டு முதுபழங் கொள்கையின் முடிவுகளை ஒத்திருக்கின்றன.

குவான்டம் நிபந்தனைகள், அதிர்வு எண் தொடர்புகள் மற்றும் ஒப்புமைத் தத்துவம் ஆகிய இவை எல்லாம், ஒரு பொதுக் கோட்பாட்டின் முழுமை பெற்ற பாகங்கள் அல்ல. இவையெல்லாம் தேவைக் கேற்ப அவ்வப்போது வெளியில் இருந்து கோட்பாட்டின் நிறைவிற்காகச் சேர்க்கப்பட்டன. இதன் விளைவாகத் தான் போரின் கொள்கைகள் முதுபழங் கொள்கையோடு செம்மையான பொருத்தமின்றியும் தொடர் பின்றியும் அமைந்து விட்டன. முதுபழங் கொள்கையினைக் கொண்டு ஒரு தோற்றப்பாட்டினைப் பிற கருத்துக்களின் துணை யின்றி விளக்க இயலுமாறு அமைந்துள்ளது.

போரின் கொள்கையின் துணை கொண்டு, ஹைட்ரஜன் அணுவில் சீமன் விளைவினைச் (Zeeman effect) சீராக விளக்க இயலும். ஆனால் இக்கொள்கையின் அடிப்படையில் ஒழுங்கற்ற சீமன் விளைவினை (anomalous Zeeman effect) விளக்கும் போது விபரீத விளைவுகளே மிஞ்சுகின்றன. போரின் கொள்கை இங்கு தன் இயலாமையைக் காட்டுகிறது. எடுத்துக் கொண்ட பிரச்சனையில் இருபுலன்கள் ஒன்றையொன்று குறுக்கிடுகின்றன. அணுவானது ஒரே சமயத்தில் மின் மற்றும் காந்தப் புலனுக்கு வேறுபட்ட திசைகளில் உட்படுத்தப்பட்டு நிறமாலையை வெளி விடுகின்றது. இங்கு, போரின் கொள்கையினால் நிறமாலையைச் சரியாக விளக்க முடியாமல் உள்ளது.

போரின் கொள்கை இத்தகைய இழி நிலைக்கு வந்ததற்குக் காரணமான ஒன்றை ஹெய்ஸ்சன்பர்க் குறிப்பிடுகிறார். போரின் கொள்கையானது கண்டறியத்தக்கவைகளை (observables) அடிப்படையாகக் கொண்டு உருவாக்கப்பட்டதன்று. மேலும் போரின் அணுமாதிரிப் பரிசோதனை அடிப்படையில் உருவாக்கப் பட்டதன்று. எடுத்துக்காட்டாக, எலெக்ட்ரானின் சுற்றுப் பாதையைப் பரிசோதனை மூலம் நாம் என்றும் கண்டறிந்ததில்லை.

ஆதலினால் 1925-ஆம் ஆண்டில் ஹெய்ஸ்சன்பர்க் ஒரு புதிய கோட்பாட்டினைக் கண்டறியக் கூடியவைகளை மட்டுமே அடிப்படையாகக் கொண்டு, உருவாக்கத் திட்டமிட்டார். அணுவைப் பற்றி நாம் என்ன கண்டறிய முடியுமோ அவற்றை அடிப்படையாகக்கொண்டு, ஒரு புதிய விசையியல் காண்பது மிகவும் பொருத்தமாக இருக்கும் எனவும் அவர் எண்ணினார். எடுத்துக் காட்டாக, நிறமாலைக் கோடுகளின் அதிர்வு எண்கள், அணுவால் வெளியிடப்பட்ட ஒளியின் செறிவு ஆகியவை கண்டறியத் தக்கனவாகும் (observables).

ஹெய்ஸ்சன்பர்க், போர் கோட்பாட்டில் சிறந்தவற்றைத் தெரிந்து எடுத்துக்கொண்டார். அதாவது அணுவானது ஒரு சில குறிப்பிட்ட நிலைகளில் தான் உள்ளது என்பதையும் அதிர்வெண் தொடர்பினையும் சரியானதென்று எண்ணி, அதனைத் தம் புதிய கோட்பாட்டில் புகுத்தியுள்ளார்.

போரின் அதிர்வெண் தொடர்பு

$$\gamma = \left(\frac{Em - En}{h} \right) \text{ ஆகும்.}$$

ஹெய்ஸ்சன்பர்க் ஓர் எளிய தொகுதியினை எடுத்துக்கொண்டார். அது, ஒரு காலவட்ட ஒழுங்குடைய (periodic) இயக்கவிசையியல் (dynamical) தொகுதி (system) ஆகும். அதன் அதிர்வு $w = 2\pi\gamma$ எனக் கொண்டார். அதன் ஆயத் தொலைகள் q எனக் கொண்டு அதனை ஃபோரியர் தொடர்பாக (Fourier Series) வகைக் குறியீடாக்கினர் (represented),

ஃபோரியர் தொடர்புப்படி,

$$qn\,(+) = a_0 + a_1 \cos 2\pi\gamma t + a_2 \cos 2\,(2\,\pi\gamma t) \quad \ldots$$

$$\ldots + b_1 \sin 2\pi\gamma t + b_2 \sin 2\,(2\pi\gamma t) + \ldots\ldots$$

$$= a_0 + \tfrac{1}{2}(a_1 - ib_1)\, e^{2\pi i\gamma t} + \tfrac{1}{2}(a_2 - ib_2)\, e^{2\,(2\pi i\gamma t)} + \ldots\ldots$$

$$+ \tfrac{1}{2}(a_1 + ib_1)\, e^{-2\pi i\gamma t} + \tfrac{1}{2}(a_2 + ib_2)\, e^{-2\,(2\pi i\gamma t)} + \quad \ldots$$

$$= q_0 + q_{-1}\, e^{-2\pi i\gamma t} + q_{-2}\, e^{-2\,(2\pi i\gamma t)} + q_{-3}\, e^{-3\,(2\pi i\gamma t)} + \quad \ldots$$

$$+ q_{-1}\, e^{-2\pi i\gamma t} + q_{-2}\, e^{-2\,(2\pi i\gamma t)} + q_{-3}\, e^{-3\,(2\pi i\gamma t)} \quad \ldots$$

$$= \sum_{\alpha = -\alpha}^{+\alpha} q_\alpha\, e^{-\alpha(2\pi i\gamma t)} \quad \ldots(1)$$

இங்கு $q\alpha = \frac{1}{2}(a_1 - ib_1)$ மற்றும்

$$q_{-\alpha} = \frac{1}{2}(a_1 + ib_1)$$ ஆகும்.

மேலும் $q_{-\alpha} = q^*\alpha$ எனவும் அமைந்துள்ளது.

ஹெய்ஸ்சன்பர்க், தமது புதிய விசையியலில் கீழ்க்கண்டதைத் தற்கோளாகக் கொண்டார். ஆயத் தொலைவு qஐ சீரிசைக் கூறுகள் கொண்ட சில வடிவத்தினால் $qe^{-2\pi ivt}$ வகைக் குறியீடு செய்தார். கண்டறியக்கூடியவைகளான நிறமாலைக் கோடுகளின் அதிர்வெண்களும், செறிவுகளும் குறிப்பாக l என்ற நிலையைவிட்டு m நிலையைப் பெயர்ந்து அடைவதைப் பொருத்தே இருப்பது தெளிவாகும். எனவே q மற்றும் v ஆகியவை இருமுழு எண்களான l மற்றும் m என்பனவற்றால் சிறப்புத் தன்மை பெறுகின்றன. l மற்றும் m-க்கு மாற்றாக முதுபழுங் கொள்கை சமன்பாடு எண் (1)-ல் α என்ற எண் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது.

இரண்டு நிலைகளுக்கிடையே ஏற்படும் பெயர்ச்சிக்கு (transition) ஒப்பான அதிர்வெண்களைக் கீழ்க்கண்டவாறு வரிசைகளாக (array) அமைக்கலாம்.

$$\left.\begin{matrix} \gamma_{00} & \gamma_{01} & \gamma_{02} \\ \gamma_{10} & \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{20} & \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{matrix}\right\} \quad \ldots(2)$$

ரிடிஸ் என்பாரின் கூட்டுத் தத்துவப்படி (Ritz combination principle) ஒரு நிறமாலைக் கோட்டின் அதிர்வு எண் vmn ஆனது இரண்டு உறுப்புகளுக்கு (terms) இடையேயுள்ள வேற்றுமையாக அமையும். எனவே,

$$\gamma lm = Tl - Tm$$ எனக் கொள்ளலாம்.

மற்றும்,
$$\gamma lm + \gamma mn = (Tl - Tm) + (Tm - Tn)$$
$$= Tl - Tn$$
$$= \gamma ln$$

$$\therefore \gamma_{00} = \gamma_{11} = \gamma_{22} = 0$$

மேலும், கிறமாலைக் கோட்டின் அதிர்வு எண்ணைச் சீரிசை அலைவியற்றியோடு (harmonic oscillator) தொடர்பு செய்யலாம்.

$$q_{lm} = a_{lm}\, e^{-2\pi i \gamma_{lm} t} \quad \dots (3)$$

γ_{mn} அதிர்வெண் கொண்ட அதிர்வை

$$q'_{mn} = a'_{mn}\, e^{-2\pi i \gamma_{mn} t} \quad \dots (4)$$

எனக் கொள்ளலாம். நாம் இப்போது q_{lm} ஐ q_{mn} ஆல் பெருக்குவோம். பின்னர் m-யின் மதிப்பிற்கும் இதன் கூட்டுக் தொகையைக் காண்போம்.

$$\sum_m q_{lm}\, q'_{mn} = \sum_m a_{lm}\, a'_{mn}\, e^{-2\pi i \gamma_{ln} t}$$

வீச்சுகளும், பெயர்ச்சிகளும் (displacement) l என்ற கீழ்குறிகள் கொண்டுள்ளன.

எனவே,

$$\left.\begin{aligned} \sum_m a_{lm}\, a'_{mn} &= (aa')_{ln} \\ \sum_m q_{lm}\, q'_{mn} &= (qq')_{ln} \end{aligned}\right\} \quad \dots (5)$$

aa' மற்றும் qq' ஏற்ற வரிசைகளை (arrays) அணிப் பெருக்கல் விதிகளிலிருந்து (rules of matrix multiplication) பெறலாம். ஆதலினால் வரிசையான aக்களும் qக்களும் அணிகளாகப் (matrices) பாவிக்கப்படுகின்றன.

ஹெய்ஸ்சன்பர்க் குவான்டம் விசையியல் மாறிகளுக்கு (quantum mechanical variables) ஏற்றல் பெருக்கல் விதியினைக் கண்டுகொள்ள முயன்றார். இவ்வாறு பெருக்கும்போது பெருக்கற்பலனில் புதிய அதிர்வெண்கள் ஏதும் இருத்தல் கூடாது. என்பது கவனத்தில் இருக்க வேண்டிய தொன்றாகும். ஆதலினால்,

$$(qq')_{lm} = q_{lm}\ q'_{mn} = \sum_{m} a_{lm}e^{-2\pi i \gamma lmt}$$

$$a'_{mn}e^{-2\pi i \gamma mnt}$$

$$= \sum_{m} a_{lm}\ a'_{mn}\ e^{-2\pi i \gamma ent} \qquad ...(6)$$

மற்றும்,

$$(q'q)_{ln} = q'_{lm}\ q_{mn} = \sum_{m} a'_{lm}\ a_{mn}\ e^{-2\pi \gamma ent} \qquad ...(7)$$

பொதுவாகக் கூறுமிடத்து,

$$\sum_{m} a_{lm}\ a'_{mn} \neq \sum a'_{lm}\ a_{mn}$$

எனவே, $q'q$ மற்றும் $q'q$ வரிசைகளில் உள்ள ஒப்புமைக் கூறுகள் (corresponding components) ஒன்றுக்கொன்று சமமன்று.

ஆதலினால் $qq' \neq q'q$ ...(8)

ஹெய்ஸ்சன்பர்க் தனது முதல் குவான்டம் விசையியல் ஆராய்ச்சித் தாளை 1925 ஜூலைத் திங்களில் வெளியிட்டார். அத் தாளில் வெளிப்படையாக ஓர் உண்மையைத் தெளிவு படுத்தினார். அதன்படி, இப்புதிய விசையியலில் பெருக்கலுக்கான பரிமாற்று விதி (commutative law of multiplication) இங்கு ஒத்து வராது என்று இயம்பினார். அடுத்து இரண்டுமாத இடை வெளிக்குப் பின் 1925ஆம் ஆண்டு செப்டம்பர் திங்களில் பார்ன் (Born) மற்றும் ஜார்டான் (Jordon) என்ற இருவரும் ஹெய்ஸ் சன்பர்க்கின் பெருக்கல் விதியானது (Heisenburg's multiplication rule) அணிகளுக்குப் (matrices) பயன்படும் பெருக்கல் விதியை முற்றிலும் ஒத்ததாகவுள்ளது என்று சுட்டிக்காட்டினர். எனவே குவான்டம் விசையியலில் (quantum mechanics) உள்ள இயக்க விசையியல் மாறிகள் (dynamical variables) யாவும் அணிகளாகும் (matrices) இதன் காரணமாகத்தான் இப்

புதிய ஹெய்ஸ்சன்பர்க்கின் குவான்டம் விசையியலை ஹெய்ஸ்சன் பர்க்கின் அணி விசையியல் (Heisenbergs Matrix Mechanics) என்று அழைக்கிறோம்.

(b) **அணி இயல் கணிதமும் அணி வகைக் குறிப்புகளும்: (Matrix Algebra and Matrix Representations)**

ϕm என்பது ஐகன் சார்பலனின் ஒருமுழுக் கணமாகும் (a complete set of eigen functions). இச் சார்பலன் கணத்தின் மீது ஒரு ஆபரேட்டர் A செய்கையாற்றும் (operate) போது நாம் q மற்றும் tஐ சார்ந்த சார்பலன்களைப் பெறுகிறோம். அவற்றைக் கீழ்க் கண்ட தொடர்களாக (series) விவரிக்கலாம். எனவே,

$$A\phi_m = \sum A_{mn} \phi_n \quad ...(9)$$

$$\text{இங்கு } A_{mn} = \int \phi_n \; A \; \phi_m \; dq \quad ...(10)$$

ஆக இருக்கும். சமன்பாடு எண் (10) ஆனது ஆபரேட்டருக்கான அணிவகைக் குறிப்பினை (Matrix representation) வரையறுக்கிறது. ஆபரேட்டர் ஓர் அடிப்படை கண ஐகன் சார்பலன்களை ϕ_s அடிப்படையாகக் கொண்டதாகும். இந்த அணியானது (amtrix) ஆபரேட்டரைக் குறிப்பதாக (representative) அமைகிறது.

இவ்வகைக் குறியீடான அணி ஒரு சதுர அணியாக $(n \times n)$ இருப்பின். நாம் n பரிமாண வகைக் குறியீடு ஆபரேட்டரைப் பெறுவோம்.

இரண்டு அணிகளை எடுத்துக் கொள்வோம். அவை இரண்டும் ஒரே எண்ணிக்கைக் கொண்ட நிரல்களு் (columns), நிரைகளும் (rows) உடையவையாக இருப்பின் அவை ஒன்றுக் கொன்று சமமானவை ஆகும். மேலும் குறிப்பிட்ட எல்லா உறுப்புகளும் இரண்டு அணிகளிலும் சமமாக இருக்க வேண்டும்.

$$\therefore \left(BA \right)_{ij} = \sum_k B_{ik} \; A_{kj} \quad ...(11)$$

மற்றும், பொதுவாக $BA \neq AB$

பொதுவாக எந்த இரண்டு அணிகளும் பரிமாற்று விதிக் (commutative law) குட்படாது.

$$\left[A, B \right] = AB - BA$$

இதனை இரு அணிகளுக்கான (A மற்றும் B) பரிமாற்றி (commutator) எனக் கூறலாம்.

$$\left[(AB)\, C \right]_{ik} = \sum_{r} \left(AB \right)_{in} C_{rk}$$

$$= \sum_{r} \sum_{s} A_{is}\; B_{sr}\; C_{rk}$$

$$= \sum A_{is} \left(BC \right)_{sk} = \left(A(BC) \right)_{ik} \quad \ldots(12)$$

ஆதலினால், $(AB)C = A\,(BC)$

எனவே அணிகள் சேர்ப்பு விதிக்கு (Associative Law) உட்படு கின்றன என்பது தெளிவாகும்.

A மற்றும் B என்ற இரு அணிகளிலும் ஒரே எண்ணிக்கை கொண்ட நிரைகளும் நிரல்களும் இருப்பதாகக் கொண்டால் (A+B) என்ற இரண்டு அணிகளின் கூட்டுப் பலனைக் கீழ்க் கண்டவாறு வரையறுக்கலாம். (A+B) அணியின் உறுப்புக்கள் தனித்தனியே A அணி மற்றும் B அணி ஆகியவற்றின் தனித்தனி உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமாக இருக்கும். மேலும்,

$$A + B = B + A$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$\left[A + B, C \right] = (A + B)\, C - C\,(A + B)$$

$$= AC + BC - CA - CB \quad \ldots(13)$$

$$= \left[A, C \right] + \left[B, C \right]$$

$$\left[AB, C\right] = A\left[B, C\right] + \left[A, C\right]B$$

$$\left[A, BC\right] = \left[A, B\right]C + B\left[A, C\right]$$

λ என்பது ஒரு எண் எனக் கொள்வோம். λA என்ற அணியினைக் கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கலாம். λA என்ற அணியானது தனது ik உறுப்பாக λA_{ik} என்ற மதிப்பைக் கொண்டிருக்கும்.

ஒரு கணியம் (quantity) மற்ற எல்லாக் கணியங்களுடன் பரிமாற்றிக் கொள்ளும் (commutes) தன்மையுடைய தாக இருப்பின் அக் கணியம் C எண் என்று அழைக்கப்படும். இந்த அணியின் உறுப்புகள் C எண்களால் ஆனவையாகும்.

மூலைவிட்ட அணி (diagonal matrix) D என்பது மூலைவிட்ட உறுப்புகளைத் தவிர மற்ற எல்லா உறுப்புகளும் சுழியாக இருக்கும். அதாவது $D_{ik} = 0 \; (i \neq k)$ மூலைவிட்ட அணியின் மூலைவிட்ட உறுப்புக்கள் யாவும் 1ஆக இருந்தால் அதனை அலகு அணி I (unit matrix) என்று அழைக்கப்படும்.

$$I_{ik} = \delta_{ik} \quad (\delta\text{–க்ரானக்கெர் டெல்ட்டா})$$

$$(AI)_{ik} = \sum_j A_{ij} I_{ki} \sum_j A_{ij} \delta_{ik} = A_{ij}$$

$$= \sum_j \delta_{ij} A_{ik} = (IA)_{ik}$$

$$\therefore \; AI = A = IA \qquad ...(14)$$

எனவே, அலகு அணி எல்லா அணிகளோடும் பரிமாற்றிக் கொள்ளும் தன்மையுடையது. A அணிக்கு நேரெதிர் அணி (reciprocal matrix) A^{-1} எனக் கொள்வோம். இதனைக் கீழ்க் கண்டவாறு வரையறுக்கலாம்.

$$A^{-1} A = I \qquad ...(15)$$

திருப்பு அணி (Transpose of a Matrix)

B என்ற அணியில், நிரைகளை நிரல்களாகவும், நிரல்களை நிரைகளாகவும் மாற்றி அமைத்துக் கிடைக்கும் அணிக்கு, B-யின் திருப்பு அணி என்று பெயர். இதனை B^T எனக் குறிப்பிடுவர்.

$$B^T_{ik} = B_{ki} \quad ...(16)$$

சிக்கல் அணி (Complex Matrix)

ஓர் அணியின் சில உறுப்புகள் சிக்கல் எண்களாகவும் அமையலாம். இவ்வாறுள்ள அணியைச் சிக்கல் அணி என்பர்.

இணை அணி (Conjugate Matrix)

ஓர் அணியில் உள்ள சிக்கல் எண்களுக்கு மாற்றாக அவற்றின் இணை எண்களை உறுப்புகள் ஆக்கினால் கிடைக்கும் புதிய அணிக்கு இணை அணி என்று பெயர்.

ஹெர்மிஷன் அணி (Hermitian Matrix)

ஓர் அணியானது அதன் திருப்பு-இணை அணிக்குச் சமமானால் அதை ஹெர்மிஷன் அணி என்று சொல்லுவோம். அதாவது $A^* = A$ ஆனால் A என்பது ஹெர்மிஷன் அணியாகும்.

ஹெர்மிஷன் இணை (Hermitian Conjugate)

B என்ற அணியின் ஹெர்மிஷன் இணையை B^* எனலாம். இவ்வணி B-யின் சிக்கல் இணையாகும்.

$$B^+_{ik} = B^*_{ki} \quad ...(17)$$

Bயானது ஹெர்மிஷன் அணியாக $B^+ = B$ ஆக இருக்க வேண்டும். எல்லைக் குட்பட்ட எண்கள் கொண்ட ஹெர்மிஷன் அணிகளின் கூட்டு ஒரு ஹெர்மிஷன் அணியாகும்.

ஓர் ஆபரேட்டரை ஒரு அணியாகக் குறிப்போம். இதன் சேர்ப்பு அணியானது (adjoint Matrix) ஹெர்மிஷன் இணை அணியாகக் குறிக்கப்படும்.

ஒரு தன்-சேர்ப்பு ஆபரேட்டரை (Self-adjoint operator) ஹெர்மிஷன் அணியாகக் குறிப்போம். ஆதலினால் அணிவகைக் குறிப்பில் எல்லா இயற்பியல் கணியங்களும் (physical quantity) ஹெர்மிஷன் ஆகும். ஓர் அணியின் மூலைவிட்ட உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையை ஸ்பர் அல்லது ட்ரேஸ் (trace) என்பர்.

A மற்றும் B என்ற இரு சதுர அணிகளை n வரிசை (order) உள்ளதாக எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\text{ஸ்பர்}\ (AB - BA) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} - \sum_{i=1}^{n} (BA)_{ii} \quad \ldots(18)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (A_{ik} B_{ik} - B_{ik} A_{ki}) = 0 \quad \ldots(19)$$

ஆதலினால், முடிவுள்ள பரிமாற்றியின் (finite commutator) ஸ்பர் (spur) ஆனது சுழியாக உள்ளது.

A ஆனது ஓர் அணி u என்ற மாறிலியின் சார்பலனாகும் என்றும், அதன் உறுப்புக்கள் u-யின் சார்பலனாகும் என்றும் கூறினால், அணி $\frac{\partial A}{\partial u}$ என்பதைக் கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கலாம். $\frac{\partial A}{\partial u}$ அணியின் ik உறுப்பானது $\frac{\partial A_{ik}}{\partial u}$ ஆகும்.

$A = BC$ ஆனால், பிறகு

$$\left(\frac{\partial A}{\partial u}\right)_{ik} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\sum_{r} B_{ir}\ C_{rk}\right)$$

$$= \sum_{r} \frac{\partial B_{ir}}{\partial u} C_{rk} + \sum_{r} B_{ir} \frac{\partial C_{rk}}{\partial u} \quad \ldots(20)$$

ஆதலினால்,

$$\frac{\partial}{\partial u}(BC) = \frac{\partial B}{\partial u} C + B \frac{\partial c}{\partial u} \quad \ldots(21)$$

இதே போன்று,

$$\frac{\partial}{\partial u}(BCD) = \frac{\partial B}{\partial u} CD + B \frac{\partial C}{\partial u} D + BC \frac{\partial D}{\partial u} \quad ...(22)$$

(c) அணிவகைக் குறியீடு (Matrix Representation)

Amn என்பது அணி *A*யின் ஒரு உறுப்பாகும். இவ்வுறுப்பு *A* என்ற ஆபரேட்டருடன் தொடர்புடையதாகும்.

இதனை $A_{mn} = \int \phi_n^* A \phi_m \, dq \quad ...(23)$

என அமைக்கலாம்.

இங்கு $\phi_1, \phi_2, ...$etc ஏதாவதொரு அடிப்படைச் சிறப்பியல்பு சார்பலன்களின் கணமாகும் (basic set of eigen functions). மேலும் χ மற்றும் φ என்பன இரு சார்பலன்களாகும். இச் சார்பலன்கள் ϕ கள் கொண்ட ஒரு தொடராக (series) விரிக்கப் (expanded) பட்டுள்ளது.

$$\left.\begin{aligned} \chi &= \Sigma b_i \phi_i \quad i = 1, 2...... \\ \varphi &= \Sigma c_i \phi_i \quad i = 1, 2, 3 ...... \end{aligned}\right\} \quad ...(24)$$

χஐ ϕ_r^*ஆல் பெருக்குவோம். பின்னர் அப்பெருக்குத் தொகையைத் தொடர் உறுப்புத் தொகை பெற்றால் (Integration term by term) நாம் கீழ்க்கண் சமன்பாட்டை அடையலாம்.

$$\int \phi_r^* \chi \, dq = b_1 \int \phi_r^* \chi_1 \, dq + b_2 \int \phi_r^* \chi_2 \, dq + \ldots + b_r \int \phi_r^* \chi_r \, dq \quad ...(25)$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore \; b_r &= \int \phi_r^* \chi \, dq \\ \text{மற்றும்,} \; C_r &= \int \phi_r^* \varphi \, dq \end{aligned}\right\} \quad ...(26)$$

மேலும், $\varphi = A X$ என இருப்பின் ...(27)

$$\text{பிறகு } C_s = \int \psi_s^* A X \, dq$$

$$= \int \psi_s^* A (b_1 \psi_1 + b_2 \psi_2 + \ldots) dq$$

$$= \left[\int \psi_s^* A \psi_1 \, dq \right] b_1 + \left[\int \psi_s^* A \psi_2 \, dq \right] b_2 + \ldots\ldots$$

$$= A_{s1} b_1 + A_{s2} b_2 + \ldots\ldots$$

எனவே Cக்களுக்கும் Bக்களுக்கும் இடைப்பட்ட தொடர்பினைக் கீழ்க் கண்ட வடிவில் வெளிப்படுத்தலாம்.

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \ldots\ldots \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \ldots\ldots \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \ldots \end{pmatrix} \quad \ldots(28)$$

ஆதலினால் ஏதாவதொரு சார்பலன் X யானது ஒரு நிரல் அணியைத் (column matrix) தொடர்புடையதாக அமையும். அவ்வணியின் உறுப்புக்கள் $\psi_1 \psi_2 \psi_3$ ஆகியவற்றின் கெழுக்களாக (coefficients) அமையும். Xயினை ψ_1 ψ_2 ψ_3 வாயிலாக விவரிக்கிறோம். என்பதையும் கவனத்தில் கொள்ள வேண்டும்.

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \ldots \end{pmatrix} \quad \ldots(29)$$

சமன்பாடு எண் (27)-ஐ அணிச்சமன்பாடாகக் கருதுகிறோம். அவ்வணி X மற்றும் φயின் வகைக் குறியீடுகளுக்கு இடைப்பட்ட தொடர்பாக அமையும். எனவே சமன்பாடு (27)ஐ அணிச் சமன்பாடாகக் கருதினால்

$$C = A b \quad \ldots(30)$$

$$C^+ = b A^+ \quad \ldots(31)$$

இவை பொருந்தும்

இங்கு

$$\left.\begin{array}{l} c+ = \overbrace{\underbrace{\overset{*}{c_1} \ \overset{*}{c_2} \ \overset{*}{c_3}}} \\ \\ b+ = \overbrace{\underbrace{\overset{*}{b_1} \ \overset{*}{b_2} \ \overset{*}{b_3}}} \end{array}\right\} \quad \ldots(32)$$

(d) அணியை மூலவிட்ட அணியாக மாற்றுதல் (Diagonalisation of a Matrix)

கொடுக்கப்பட்ட அணி A ஐ ஒரு மூலைவிட்ட அணியாக (D) மாற்ற வேண்டும். கீழ்க்கண்ட எடுத்துக்காட்டின் மூலம் இவ் வழி முறையை விளக்கலாம்.

A என்பதை உதரம் (rank) *கொண்ட அணியாகக் கொள்வோம்.*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad \ldots(33)$$

மற்றும் மூலைவிட்ட அணி D ஐ

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & D_{22} \end{pmatrix} \quad \ldots(.4)$$

எனவும் கொள்வோம்.

S என்ற நிலைமாற்ற அணி (Transformation matrix) *A என்ற அணியை D என்ற மூலைவிட்ட அணியாக மாற்றுகிறது. எனவே,*

$$S^{-1} AS = D$$

$$\therefore \quad AS = SD \quad \ldots(35)$$

இரு பக்கங்களிலும் உள்ள mn கூறினை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$\sum_{k=1}^{2} A_{mk} S_{kn} = \sum_{k=1}^{2} S_{mk} D_{kn} = S_{nn} D_{nm}$$

இதனை நாம் பெறுகிறோம்.

$$\left.\begin{array}{l} A_{m1} S_{1n} + A_{m2} S_{2n} = S_{mn} D_{nn} \\ \qquad\qquad (m, n = 1, 2) \end{array}\right\} \quad ...(36)$$

$n=1$ எனவும் $m=1, 2$ எனவும் சமன்பாடு எண் (36)-ல் எடுத்துக் கொண்டால்

$$A_{11} S_{11} + A_{12} S_{21} = S_{11} D_{11}$$
$$A_{21} S_{11} + A_{22} S_{21} = S_{21} D_{11}$$

இங்கு Sகளை நீக்குவோம் (eliminate) அதன் பயனாக,

$$\begin{vmatrix} A_{11} - D_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - D_{11} \end{vmatrix} = 0 \quad ...(37)$$

என்ற சமன்பாட்டைப் பெறலாம்.

$n=2$ எனவும் $m=1, 2$ எனவும் கொண்டால்

$$\begin{vmatrix} A_{11} - D_{22} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - D_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad ...(38)$$

என்ற சமன்பாட்டைப் பெறலாம்

மேற்கூறிய சமன்பாடு எண்கள் (37) மற்றும் (38) ஆகியவைகளிலிருந்து D_{11} மற்றும் D_{22} என்ற இரு மூலங்களைக் காண்கிறோம். இவை λ வைக் கொண்டு அமைக்கப்பட்ட நீளகாலச் சமன்பாட்டிற்கு (secular equation) மூலங்களாக அமைகின்றன. அதாவது

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad ...(39)$$

இப்பொழுது A என்பது ஒரு ஹெர்மீஷியன் அணியாக இருப்பின் சமன்பாடு (39)-க்கு மெய்யானதும் தனிப்பட்ட சிறப்புக் கொண்டதுமான மூலங்கள் கிடைக்கும். நாம் இப்போது மூலை விட்ட அணி Dஐக் காண வேண்டும். இதற்காக நாம் சமன்பாடு எண் (39)-க்குத் தீர்வு காண வேண்டும்.

ஒரு பொதுப்படையான வழிமுறையில் இதனைப் பொதுவான நிலையில் எடுத்துக் கொண்டு செயலாற்றுவோம்.

A அணியின் தரத்தை (rank) r எனவும் அது ஒரு ஹெர்மீஷியன் அணி எனவும் கொள்வோம். இந்த A அணியை மூலைவிட்ட அணி D ஆக மாற்ற வேண்டும். இதற்காக ஒரு நிலை மாற்று அணியைப் S (Transformation matrix) பயன்படுத்துவோம். எனவே,

$$S^{-1} AS = D \quad i.e. \quad AS = SD$$

இச் சமன்பாட்டில் உள்ள அணியின் இருபுறமுள்ள mn கூறுகளை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$\sum_{k=1}^{r} {}_{k} S_{nk} = \sum_{k=1}^{r} S_{mk} D_{kn} = S_{mn} D_{nn}$$

இச் சமன்பாட்டில் $n = 1, 2 \ldots etc$ எனவும் $m = 1, 2, 3 \ldots etc.$ எனவும் கொள்வோம். அதன் விளைவாக நாம் கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளைப் பெறலாம்.

$$A_{11} S_{11} - D_{11} S_{11} + A_{12} S_{21} + \ldots\ldots\ldots A_{1}r \; Sr_{1} = 0$$
$$A_{21} S_{11} - (A_{22} - D_{11}) \; S_{21} + \ldots\ldots\ldots + A_{2}r \; Sr_{1} = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Ar_{1} S_{11} + Ar_{2} S_{21} + \ldots\ldots\ldots (Arr - D_{11}) = 0$$

இச்சமன்பாடுகளிலிருந்து நீக்குவோமாயின்,

$$\begin{vmatrix} A_{11} - D_{11} & A_{12} & A_{13} \ldots & A_{1}r \\ A_{21} & A_{22} - D_{11} & A_{23} \ldots & A_{2}r \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ Ar_{1} & Ar_{2} & Ar_{3} & Arr - D_{11} \end{vmatrix} = 0 \ldots 40$$

என்ற இச்சமன்பாட்டைப் பெறலாம்.

மேலும், ஏதாவதொரு கூறு Dnn ஐ அடைய வேண்டுமாயின் மேற்கொண்ட வழிமுறையை மீண்டும் பின்பற்றி சிறப்பியல்புச் சமன்பாட்டை (secular equation) D-யின் பிற மதிப்புகளுக்குப் பெறலாம். எனவே, $d_1 \, d_2 \ldots\ldots dr$ என்பன A அணியின் சிறப்பியல்பு மதிப்புகள் (eigen values) என நாம் கூறலாம். இவை கீழ்க்கண்ட சிறப்பியல்புச் சமன்பாட்டிற்கு மூலங்களாகவும் (roots) அமைகின்றன.

$$\begin{vmatrix} A_{11}-\lambda & A_{12} & A_{13}\cdots\cdots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda & A_{23}\cdots\cdots & A_{2r} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ A_{r1} & A_{r2} & A_{r3}\cdots\cdots & A_{rr}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots(41)$$

மேற்கூறிய சமன்பாடு எண் (41)-ல் A அணியானது ஹெர்மீஷியன் அணியாக இருப்பதால் எல்லா மூலங்களும் (roots) மெய்யானவை (real) ஆகும்.

சில நிலைகளில் (state) நாம் ஆபரேட்டர் A-யின் சிறப்பியல்பு மதிப்புகளையும் (eigen values) Aயின் எதிர் நோக்கும் மதிப்பினையும் இனம் கண்டு கொள்ள வேண்டியுள்ளது. ஒரு தொகுதியின் நிலையை ψn என்ற சார்பு விவரிப்பதாகக் கொள்வோம். இந் நிலைக்கான எதிர் நோக்கும் மதிப்பு A (expectation value) என்பது A-யின் சராசரி மதிப்பு எனப் பொருள்படும். அம் மதிப்பை இந் நிலையில் (state)

$$\int \overset{*}{\psi n}\ A\psi n\ dq = Ann \qquad \ldots(42)$$

ஆகவுள்ளது எனக் கூறலாம்.

மேற்கூறிய நிலையை ஓர் அணியாகவும் அமைக்கலாம். A-யின் மதிப்பிற்கு ஒப்பான அணியின் மூலவிட்டத்தில் உள்ள கூறுகள் A-யின் எதிர் நோக்கும் மதிப்பினைத் (expectation) தருவதாக அமையும். பொதுவாக, பிற உறுப்புக்களும் அவ்வணியில் இடம் பெற்றிருக்கலாம். ஒரு தனிப்பட்ட சூழலில் மட்டும் இச்சிறப்பு அமைவதைக் காணலாம்.

$\psi_1\ \psi_2\ \psi_3$ என்பன A-யின் சிறப்பியல்புச் சார்புகளாக (eigen functions) இருக்கும்போது, எதிர் நோக்கும் மதிப்புகளும் (expectation values) அச்சிறப்பியல்பு மதிப்புகளும் (eigen values) ஒன்றாக அமையும்.

(e) இயக்கவியல் மாறிலிகள் (Constants Motion)

இயக்கவியல் மாறிலி என்பதைக் குவான்டம் விசையியல் அடிப்படையில் நோக்குவோம். இங்கு a என்பது ஒரு இயக்க மாறிலியைக் குறிக்கும், இது முழுவதுமாகக் (explicitly) கால அடிப்படையில் மாறுபாடு அடையாது. மற்றும்

$$aH = Ha \qquad \ldots(43)$$

என்பதாக அமையும். கொடுக்கப்பட்ட தொகுதியின் ஹேமில்டோனியன் ஆபரேட்டரோடு (Hamiltonian operator) a என்ற ஆபரேட்டர் பரிமாற்றிக்கொள்ளும் தன்மையுடையதாக உள்ளது. இவ்வாறு இருப்பின் இயங்கு a என்பது அத்தொகுதியின் இயக்க மாறியாக (constant of motion) அமையும்.

இயக்கச் சமன்பாடு (equation of motion) கீழ்க் கண்டவாறு அமையும்,

$$\dot{a} = \frac{i}{\hbar}(Ha - aH) \qquad \text{...(44)}$$

a வானது Hவுடன் பரிமாற்றிக் கொள்ளுமாயின் a^kயும் Hவுடன் பரிமாற்றிக் கொள்ளும். ஆதலினால், a வானது ஒரு இயக்கவியல் மாறிலியாக இருப்பின், a^k-ம் அத்தொகுதிக்கு ஒரு இயக்கவியல் மாறிலியாக அமையும். எனவே, பொதுவாக இயக்கவியல் மாறிலி என்பது ஓர் ஆபரேட்டர். இந்த ஆபரேட்டர் ஹேமில்டோனியன் H-வுடன் பரிமாற்றிக் கொள்ளும் தன்மையுடையது; மேலும் இயக்க மாறிலி காலத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டு மாறுபாடு அடைவதில்லை.

எனவே, கட்டில்லாமைத் துகளுக்கு (free particle) ஹேமில்டோனியன் ஆபரேட்டரை

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \text{ என அமைக்கலாம்.}$$

உந்த ஆபரேட்டரை

$$P = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \text{ என அமைக்கலாம்.}$$

உந்த ஆபரேட்டர் ஹேமில்டோனியனுடன் பரிமாற்றிக் கொள்ளும் தன்மையுடையது. எனவே உந்தமும் கட்டில்லாத துகளுக்கு ஓர் இயக்கவியல் மாறிலியாக அமையும். இதனைக் கீழ்க் கண்டவாறு நிரூபிக்கலாம்.

$$H\phi(x) = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial\phi^2}{\partial x^2}x)$$

$$\text{எனவே, } P H\psi(x) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)$$

$$= \frac{i\hbar^3}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^3}\right)$$

$$\text{மற்றும், } P\psi(x) = -i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$\text{எனவே, } PH\psi(x) = HP\psi(x)$$

$$PH = HP$$

$$\text{அதாவது } HP - PH = 0 \qquad (45)$$

P யானது *H* வுடன் பரிமாற்றிக் கொள்ளும்.

(f) இயக்கவியல் சமன்பாடு

ஹெமில்டோனியன் ஆபரேட்டருக்கு (*H*) மெய்யான ஐகன் மதிப்பு (real eigen value) உண்டு. ஆகவே இது ஒரு ஹெர்மீஷியன் ஆகும். *H* என்ற ஆபரேட்டர் காலத்தை அடிப் படையாகக் கொண்டு மாறுபாடு அடைவதில்லை. ஆனால் *H* ஆனது, *x* ஆப் மற்றும் *P* ஆப் ஆகியவற்றின் சார்பலன் களாகவே உள்ளது. நிலைகளின் காலத்தைப் பொருத்தும் மாறும் தன்மையானது, அலைச் சார்பலனில் (wave function) உள்ளது.

ஒரு மாறிலியின் காலக் கெழுவினை முதுபழுங் கொள்கையில் விளக்குவதுபோல், குவான்டம் விசையியலைக் கொண்டு விளக்க இயலாது.

இதற்கு மாறாக, ஒரு விளக்கம் தேவைப்பட்டால், ஒரு நவீன முறையில் *A* என்ற குறியை ஆபரேட்டராகக் கொண்டுகூறலாம். *A* என்பது ஒரு ஆபரேட்டர். ψ என்ற நிலையில் (state) அதன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு எதிர்பார்க்கும் ஆபரேட்டர் *A*-யின் காலக் கெழுவுக்குச் சமமாகும்.

ψ-யின் கால அடிப்படையைத் துகளுக்கான ஷ்ராடிங்கரின் காலம் சார்ந்த சமன்பாடு மூலம் பெறுகிறோம்.

$$H\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \qquad \ldots(46)$$

ஆபரேட்டர் A-யின் எதிர்நோக்கும் மதிப்பினை $<A>$ எனக் குறிப்பது வழக்கம். எனவே,

$$<A> = \frac{\int_T \psi^* A\psi dT}{\int \psi^* \psi dT} (\psi, A\psi)$$

அல்லது

$$\frac{d}{dt}<A> \left(\frac{\partial \psi}{\partial +}, A\psi\right) = \left(\psi, A\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)$$

$$= \frac{i}{\hbar}\left\{(H\psi, A\psi) - (\psi, AH\psi)\right\} \quad ...(47)$$

∵ H என்பது ஒரு ஹெர்மிஷியன் ஆபரேட்டராதலின், மேலுள்ள சமன்பாட்டைக் கீழேயுள்ளவாறு அமைக்கலாம்.

$$\frac{d<A>}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left(\psi, (HA - AH)\psi\right)$$

அல்லது $A^{\circ} = \frac{i}{\hbar}$ $[H,A]$ ...(48)

A-யின் கால வகைக் கெழுவானது (time derivative of A) H மற்றும் A-க்கு மிடையேயுள்ள பரிமாற்றுத்தொடர்பாக அமைகிறது. இத்துடன் $\frac{i}{\hbar}$ என்ற கணியத்தால் பெருக்கப் பட்டும் அமைந்துள்ளது.

சமன்பாடு எண் (48) ஐ A–யின் இயக்கச் சமன்பாடு (the equation of motion of A) என்று அழைப்பர். குவான்டம் விசையியலில், ஓர் இயங்கு மாறியின் (dynamical variable) இயக்கச் சமன்பாடு (equation of motion) என்றால் என்ன எனக் காண்போம்.

இங்கு வரக்கூடிய இயங்கு மாறிக்கு காலவகைக் கெழு காண வேண்டும். இதற்கு எத்தகைய தன்மையுள்ள ஆபரேட்டர் அமைக்க வேண்டும் என்பது பற்றிய தெளிவான கருத்தினை, அந்த இயக்கச் சமன்பாடு கொடுப்பதாக அமையும்.

சமன்பாடு எண் (48)-ன்படி x என்பதுடன் தொடர்புள்ள ஆபரேட்டரைக் காண்போம்.

$$\overset{\circ}{x} = \frac{i}{\hbar}\left[H, x\right] = \frac{i}{\hbar}(Hx - xH) \qquad ...(49)$$

அதாவது, $\overset{\circ}{x} = \frac{i}{\hbar}\left[\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)x + V(x)\,x - x\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) - x\,V(x)\right]$

$$= -\frac{i\hbar}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}x - x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$$

$$= -\frac{i\hbar}{2m} * \frac{\partial}{\partial x}$$

அல்லது, $\overset{\circ}{x} = \frac{P}{m} \qquad ...(50)$

இங்கு P என்பது உந்தத்தோடு (momentum) தொடர்பு கொண்ட ஓர் ஆபரேட்டர் ஆகும்.

கொடுக்கப்பட்ட தொகுதியானது காப்பு நிலைத் தொகுதியாயின் (conservative system) H ஆனது காலத்தை (t) அடிப்படையாகக் கொண்டு மாறுபடாது. எனவே,

$$\overset{\circ}{H} = \frac{i}{\hbar}\left[H, H\right] = \frac{i}{\hbar}(HH - HH) = 0 \qquad ...(51)$$

காப்பு நிலைத் தொகுதியின் ஆற்றல் நிலையானது. இதுவே அத்தொகுதியின் இயக்கவியல் மாறிலியாக (constant of motion) அமையும். எனவே, எந்த ஓர் ஆபரேட்டர் தொகுதி ஹெமில்டோனியனுடன் பரிமாற்றிக் கொள்கிறதோ அத்தொகுதி காலத்தைக் கொண்டு மாறுபாடு அடையாது என்பது தெளிவாகிறது. மேலும், அதன் மாறாத ஆற்றலே அத் தொகுதியின் இயக்கவியல் மாறிலியாகவும் அமையும்.

6-2. குவான்டம் விசையியல்-பயன்-சீரிசை அலையியற்றி

சீரிசை அலையியற்றி (Harmonic Oscillator) :

அணி விசையியல் அடிப்படையில் சீரிசை அலையியற்றி பற்றிய கொள்கையினைக் காண்போம்.

முதுபழங் விசையியல்படி நேரியல் சீரிசை அலையியற்றி யின் இயக்கச் சமன்பாட்டினைக் (equation of motion கீழ்க்கண்ட வாறு அமைக்கலாம்.

$$mq + k\ddot{q} = 0$$

இங்கு, $v = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k/m}$ ஆகும்.

$$4\pi^2 v^2 m = k$$

$$\therefore \ddot{q} + 4\pi^2 v^2 q = 0 \qquad ...(1)$$

இவற்றின் அலையியற்றியின் இயங்கு ஆற்றல் மற்றும் நிலையாற்றல் கூட்டுத் தொகையை ஹெமில்டோனியனால் (Hamiltonian) குறிப்பிடலாம்.

$$\therefore H = \frac{P^2}{2m} + V$$

இங்கு V = நிலையாற்றல் $= 2\pi^2\gamma^2 mq^2 = 0$

$$\therefore H = \frac{P^2}{2m} + 2\,\pi^2\gamma m\, q^2 = 0 \qquad ...(2)$$

குவான்டம் விசையியலில் q மற்றும் P என்பன ஹெர்மீஷி யன்மேட்ரிசஸ் (Hermitian Matrices) ஆகும். இதன் அடிப்படைக் கூறுகள் (elements) q_{ek} மற்றும் P_{ek} என்பன. E_k என்ற ஆற்றல் நிலையைவிட்டு, E_e என்ற ஆற்றல் நிலைக்குப் பெயர் வதைக் குறிக்கும்.

ஹெய்ஸ்சன்பர்க் பெருக்கல் விதியையும் டிராக் (Dirac) விதியையும் பயன்படுத்தி

$$\overset{*}{q} = \frac{i}{\hbar}[Hq - qH] \qquad ...(3)$$

என்ற அலைச் சமன்பாட்டை அமைக்கலாம்.

$$\therefore \dot{q}\ \frac{i}{\hbar}\left\{\left[\left(\frac{P^2}{2m}\right) + 2\pi^2 mv^2q^2\right]q - q\left[\frac{P^2}{2m} + 2\pi^2 mv^2q^2\right]\right\}$$

$$= \left(\frac{i}{2m\hbar}\right) (P^2q - qP^2)$$

$$= \left(\frac{i}{2m\hbar}\right) \left\{ P(Pq - bP) + (Pq - qP) P \right\}$$

$$= \left(\frac{i}{2m\hbar}\right) \left\{ P(-i\hbar) + (-i\hbar) P \right\}$$

$$\dot{q} = \frac{P}{m} \qquad ...(4)$$

இதே போன்று, $\mathring{P} = \frac{i}{\hbar} (HP - PH)$

எனவே, $\dot{P} = -4\pi^2 m\nu^2 q \qquad ...(5)$

$$\because \mathring{q} = \frac{P}{m}; \ \ddot{q} = \frac{\dot{P}}{m} = -4\pi^2\nu^2 q \qquad ...(6)$$

சீரிசை அலையியற்றிக்கான வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் (differential equation) எண் (1) மற்றும் (5) ஆகியவற்றின் ஆயக்கூறுகள் மற்றும் உந்தங்களைச் சார்ந்தது ஆகும். எனவே ஒவ்வொரு அடிப்படைக் கூறும் இவற்றிற்கு ஏற்ப இசைவுடன் செயல்படும்.

$$\therefore \ddot{q}ek + 4\pi^4 v^2 qek \ 0 = \text{மற்றும்}$$

$$Pek = m\dot{q}ek \qquad ...(7)$$

நாம் இப்போது qek வைக் கீழ்க்கண்டவாறு விவரிக்கலாம்.

$$qek = aek \ e^{-2\pi i \gamma ek \ t}$$

$$\ddot{q}ek = -4\pi^2 \gamma^2 ek \ qek \qquad ...(8)$$

இச் சமன்பாட்டையும் சமன்பாடு எண் (7) ஐயும் சேர்த்து

$$(\gamma^2 - \gamma^2 ek) \ qek = 0 \qquad ...(9)$$

சமன்பாடு எண் (9)-லிருந்து கீழ்க்கண்டவற்றைத் தவிர

$$\gamma ek = \pm \gamma \qquad ...(10)$$

மற்ற எல்லா உறுப்புகளும் இல்லாமல் இருக்கக் காணலாம்.

ஒரு அதிர்வு எண் எழக் காரணமாகவுள்ள குவான்டத் தாவலாக (quantum jump) இருப்பின்

$$\gamma_{n-1,\ n} = \gamma$$

மற்றும் $\gamma_{n,\ n-1} = -\gamma$ ஆகும். ...(11)

இவை வெளிப்படல் மற்றும் உட்கவருதல் ஆகியவற்றிற் கேற்ற அதிர்வு எண்களாகும்.

சமன்பாடு (7)-லிருந்து

$$Pek = -2\pi i\, \gamma ek\, mqek$$

$$\therefore P_{n-1,\ n} = -2\pi i\, \gamma m\, q_{n-1,\ n}$$

மற்றும் $P_{n,\ n-1} = -2\pi i\, \gamma mqn-,\ q_{n-1}$

இவற்றைப் பெறலாம். ...(12)

qக்களையும் Pக்களையும் அணிகளாக (matrices) அமைக்கலாம்.

$$[q] = \begin{bmatrix} q_{00} & q_{01} & q_{02} & \cdots & \cdots \\ q_{10} & q_{11} & q_{12} & \cdots & \cdots \\ q_{20} & q_{21} & q_{22} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \quad ...(13)$$

ஃ (n—1), n மற்றும் n, (n—1) பெயர்ச்சிகள் செயல்படலாம்: எனவே மற்ற qக்களெல்லாம் சுழியாகும். qக்களில் எவை யெல்லாம் ஒரு குவான்டம் ஆற்றலைப் பெற்றுள்ளனவோ. அவற்றைத் தவிர மற்றவையாவும் சுழியாகும்.

$$\therefore [q] = \begin{bmatrix} 0 & q_{01} & 0 & 0 & \cdots \\ q_{10} & 0 & q_{12} & 0 & \cdots \\ 0 & q_{21} & 0 & q_{23} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \quad ...(14)$$

Pக்களின் உறுப்புக்களைச் (elements) சமன்பாடு எண் (12) லிருந்து பெறலாம்.

$$P = 2\pi i\gamma m \begin{bmatrix} 0 & -q_{01} & 0 & 0 & \dots \\ q_{10} & 0 & -q_{12} & 0 & \dots \\ 0 & q_{21} & 0 & -q_{23} & \dots \end{bmatrix} \quad \text{—(15)}$$

சமன்பாடு எண்கள் (14) மற்றும் (15)-ல் இருந்து

$$qp - qp = i\frac{h}{2\pi\, I}$$

என்பதைக் கண்டறியலாம்.

$$(qp - pq) = 4\pi i\, \gamma m$$

$$\begin{pmatrix} q_{01}\, q_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{12}\, q_{21} & -q_{01}\, q_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{23}\, q_{32} & -q_{12}\, q_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{ih}{2\pi I}$$ I என்பது அணி அலகு (unit matrix)

$$= 4\pi i\, \gamma m \begin{bmatrix} q_{01}\, q_{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{12}\, q_{21} - q_{01}\, q_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{23} q_{32} - q_{12} q_{21} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$= \frac{ih}{2\pi} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ 4\pi i\gamma m \quad q_{01}\, q_{01} = i\hbar \qquad \left[\hbar = \frac{h}{2\pi}\right]$$

$$q_{01}\, q_{10} = \frac{\hbar}{4\pi\, \gamma m}$$

$$q_{12}\, q_{21} - q_{01}\, q_{10} = \frac{\hbar}{4\pi\, \gamma m}$$

$$q_{12}\ q_{21} = \frac{(1+1)\ \hbar}{4\pi\ vm}$$

இதைப் போன்றே

$$q_{23}\ q_{32} = \frac{(2+1)\ \hbar}{4\pi\ \gamma\ m}$$

$$\therefore\ q_{n,\ n+1}\ \ q_{n+1,\ n} = \frac{(n+1)\ \hbar}{4\pi\ \gamma m}$$

இந்த அணி உறுப்புகளில் (matrix elements) எப்போதும் யாதாமொரு கட்ட உறுப்பு (arbitrary phase factor) $e^{i\alpha}$ உள்ளது. இதுவும் அலை அணிக் கோவையில் (wave function) உள்ளது போன்றதொன்றாகும். ஆனால் இவற்றைப் பற்றி பொதுமைக்குக் களங்கம் கற்பிக்காத (loss of generality) நிலையில் கீழ்க்கண்டவாறு அமைக்கலாம்.

$$q_{n,\ n+1} = \sqrt{\frac{(n+1)\ \hbar}{4\pi\ \gamma m}}\ e^{-2\pi i\gamma t}$$

$$q_{n+1,\ n} = \sqrt{\frac{(n+1)\ \hbar}{4\pi\ \gamma m}}\ e^{-2\pi i\gamma t} \qquad \ldots(16)$$

நாம் இப்போது கொடுக்கப்பட்ட ஹெமில்டோனியனை மதிப்பீடு செய்வோம்.

$$H = \frac{p^2}{2m} + 2\pi^2\gamma^2\ mq^2$$

$$P^2 = -\ 4\pi^2\gamma^2 m$$

$$\begin{pmatrix} -q_{01}\ q_{10} & 0 & q_{01}q_{12} \\ 0 & -q_{01}q_{10}+q_{12}q_{21} & 0 \\ q_{21}q_{10} & 0 & -q_{21}q_{22}-q_{23}q_{32} \end{pmatrix}$$

$$q^2 = \begin{pmatrix} q_{01}\ q_{10} & 0 & q_{01}q_{12} \\ 0 & q_{01}q_{10}+q_{12}q_{21} & 0 \\ q_{21}q_{0} & 0 & q_{21}q_{12}+q_{32}q_{23} \end{pmatrix}$$

$$H = 4\pi^2\gamma^2 m \begin{pmatrix} q_{01}q_{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{01}q_{10}+q_{12}q_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{12}q_{10}+q_{23}q_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

இந்த ஹெமில்டோனியன் அதன் மூலை விட்டத்தில் மட்டுமே உறுப்புக்களைக் கொண்டுள்ளது. மற்ற உறுப்புகள் சுழியாக இருப்பது தெளிவாகும். எனவே, சீரிசை அலையியற்றியின் ஆற்றல் நிலைகள் (energy states) யாவும் ஹெமில்டோனியன் என்ற அணியின் (matrix) மூலைவிட்ட உறுப்புகளாக அமைகின்றன.

n என்ற நிலையில் ஆற்றல் $En = Hnn$ ஆகும்.

$$\therefore En = Hnn = 4\pi^2\gamma^2 m \left(q_{n-1,n}\, q_{n,\,n-1,} + q_{n,n+1} q_{\,n+1,n}\right)$$

$$= 4\pi^2\gamma^2 m \left\{ \frac{(n-1+1)\,\hbar}{4\pi\gamma m} + \frac{(n+1)\,\hbar}{4\pi\gamma m} \right\}$$

$$= h\gamma\,(n+\tfrac{1}{2})$$

$$\therefore En = (n+\tfrac{1}{2})\,h\gamma \qquad \ldots(17)$$

இச்சமன்பாடு சீரிசை அலையியற்றியின் ஆற்றலுக்கான கோவையாகும். இதனை நாம் ஹெய்ஸ்சன்பர்க் அணி விசையியலின் (Heisenberg's Matrix Mechanics) அடிப்படையில் பெற்றுக் கொள்வோம். இதிலிருந்து சீரிசை அலையியற்றியின் சுழிப் புள்ளி ஆற்றலைப் பெறலாம் $(n=0)$ $F=\frac{1}{2}\ hr$ எனப்படும். இதே முடிவினை சில மாத கால இடைவெளிக்குப் பின் ஷ்ராடிங்கர் தமது அலை விசையியல் அடிப்படையில் பெற்றார்.

நாம் வாயுக்களின் இயக்கக் கொள்கையில் மூலக் கூறுகள் பற்றிய பண்புகளைத் தெரிந்துள்ளோம். இம் மூலக்கூறுகள் தமது நிலையான புள்ளியை விட்டு அலைவதன் பயனாக அவை அக ஆற்றலைப் பெற்றுள்ளன என்று எண்ணுகிறோம். நெர்ன்ஸ்ட் (Nernst) என்பார் மிகக் குறைந்த வெப்ப நிலையில் இவ்வணுக் கூறுகள் பற்றிச் சோதனைகள் பல செய்தார். அதன் பயனாக அவர் கண்ட முடிவின்படி தனிச் சுழி வெப்ப நிலையில் (absolute zero of the temperature) ஒரு பொருளுக்கு ஒரு முடிவுள்ள அளவு ஆற்றல் உள்ளது என்றார். இத்தகைய நெர்ட்ஸ்டின் புனைவுகோள் (1913) தற்போது வெப்ப இயக்க

வியலின் மூன்றும் விதியாக (Third law of Thermodynamics) ஏற்றுக் கொள்ளப்பட்டு உள்ளது. தனிச் சுழியில் ஒரு தொகுதியானது (system) ஒரு நிலையான நிலையில் (stationary state) இருக்கும். இந்நிலைக்கான குவான்டம் எண் (Quantum number) $n = 0$ ஆகும். போரின் கோட்பாடு அணுவின் கடைசி நிலைக்குச் சுழி ஆற்றல் தான் உண்டு என்று விவரிக்கிறது. ஆனால், ஹெய்ஸ்சன்பர்க்கின் அணி விசையியல் கடைநிலைக்கு $\frac{1}{2}h\nu_0$ என்ற ஆற்றல் உள்ளது என்று விளக்குகிறது. இவ் விளக்கத்தின் பயனாக வெப்ப இயக்கவியலின் மூன்றும் விதி நன்கு வலிவுபடுத்தப்படுகிறது.

6.3. இரு வகை விசையியல்கள் — ஒரு இணையானக் கண்ணோட்டம்

அணிவிசையியலும் அலைவிசையியலும் ஒன்றுக்கொன்று சமமானவை
(Equivalence of Matrix Mechanics and Wave Mechanics)

அணி விசையியல் கோட்பாடானது ஒரு "தொடர்ச்சியற்றகம்" (discontinum) என்ற கோட்பாட்டை அடிப்படையாகக் கொண்டு அமைந்ததாகும். இங்கு முதுபழம் விசையியலில் உள்ள தொடர்ச்சியான மாறிகளுக்கு (continuous variables) மாற்றாகத் தனித் தனியான எண்ணாலாகிய கணியங்கள் (discrete numerical quantities) கையாளப்படுகின்றன. இக் கணியங்கள் யாவும் இயற்கணித சமன்பாடுகளால் (algebraic equations) வரையறுக்கப்படுகின்றன. அலை விசையியல் முதுபழங் விசையியலின் அமைப்பிற்கேற்ற தொடராகக் கோட்பாட்டினைக் கொண்டது. ஆனால் இத் தொடரகக் கோட்பாடு தனித்த ஒரு பகுதி வகையீட்டுச் சமன்பாடு (single partial differential equation) வாயிலாகக் கட்டுப்படுத்தப்பட்டு வருகிறது.

அலைச் சமன்பாடு (The Wave Equation)

நாம், இப்போது இயங்குகின்ற ஒரு தொகுதியை எடுத்துக் கொள்வோம். அத் தொகுதிக்கு ஒற்றை உரிமைப்படி (one degree of freedom) உண்டெனவும் கொள்வோம். இத் தொகுதி q என்ற ஆயக் கூறுகளையும் P என்ற உந்தத்தையும் கொண்டதெனக் கொள்வோம், ஹெய்ஸ்சன்பர்க்கின் அணி விசையியலின் (Heisenberg's Matrix Mechanics) குவான்டம் நிபந்தனைப்படி (quantum condition).

$$(qp - pq) \neq 0$$
$$(bp - pq) = i\hbar \qquad \ldots(1)$$

என்ற பரிமாற்று விதியைப் (commutative law) பெறுகிறோம்.

தற்போது $f(q)$ என்பதை q-வின் ஏதாவதொரு சார்பலனுகக் கொண்டால்,

$$\frac{d(qf)}{dq} = f + q \frac{pf}{dq}$$

$$\therefore \left(\frac{d}{dq} q - q \frac{d}{dq} \right) f = f$$

இதிலிருந்து நாம் பெறும் கருத்துப்படி

$$\left(\frac{d}{dq} q - q \frac{d}{dq} \right) \qquad \ldots (2)$$

என்பது ஓர் ஆபரேட்டர் அலகு (unit operator) எனத் தெளிவாகும்.

சமன்பாடு எண் 2ஐ $\frac{\hbar}{i}$ என்பதால் பெருக்குவோம்.

$$\frac{\hbar}{i} \left[\frac{d}{dq} q - q \frac{d}{dq} \right] = \frac{\hbar}{i}$$

$$\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dq} q - q \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dq} = \frac{\hbar}{i} \qquad \ldots (3)$$

சமன்பாடு (3) மற்றும் (1) ஆகியவற்றை ஒப்புநோக்குவோமாயின்,

$$P = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q} \qquad \ldots (4)$$

எனவே,

$$\left.\begin{aligned} \text{உந்தம் } m\dot{x} &= \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \\ m\dot{y} &= \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial 1} \\ m\dot{z} &= \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots (5)$$

சார்பியல் கோட்பாட்டின்படி ஒரு பொருள் நான்கு ஆயக் கூறுகள் கொண்டே விவரிக்கப்பட வேண்டும். நான்காவது

ஆயக் கூறில் காலத்தைப் பொறுத்த கூறு 'i' அமைய வேண்டும். இதனை ict என அமைப்பர். x, y மற்றும் z என்ற ஆயத் தொலைவுகளோடு ict ஐயும் இணைக்க வேண்டும். நான்கு பரிமாண வெக்டருக்கு (four-dimensional vector) நான்கு கூறுகளாக P_x, P_y, P_z மற்றும் ஆற்றல் E அமைகின்றன. இங்கு $E = mc^2$ ஆகும். எனவே சமன்பாடு எண் (5)-க்கான நான்காவது சமன்பாட்டை

$$E = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}$$ என அமைக்கலாம்

நாம் இப்போது உந்தம் மற்றும் ஆற்றல் ஆகியவற்றின் செய்கைகளை (operations) ψ-யின் மீது செயல்படுத்தினால்,

$$m \mathring{x} \psi = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$ என்பதைப் பெறலாம்.

$$\therefore \frac{\partial \psi}{\partial x} = i \frac{m\mathring{x}}{\hbar} \psi \qquad \text{... (6)}$$

இப்போது இங்குக் காணப்பெறும் திசை வேகத்தைச் சீரானது எனக் கொண்டால், சமன்பாடு எண் (6)-க்கான தீர்வுகள் கீழ்க்கண்டவாறு அமையும்.

$$\psi = \psi_0 \; i/\hbar \, mux \qquad (\mathring{x} = u) \qquad \text{...(7)}$$

இங்கு ψ ஆனது ஓர் அலையைச் சுட்டிக் காட்டுவதாக உள்ளது. அவ்வலையின் அலைநீளம்

$$\lambda = \frac{h}{mu} = \frac{h}{p}$$

இச் சமன்பாடு y என்ற உந்தத்தோடு இயங்குகின்ற ஒரு துகளுக்குச் சீரான அலைத் தொடர்களைப் பெற்றிருக்கும் என்பது தெளிவாகிறது. அச் சீரான அலைகளின் அலைநீளம் $= \frac{\hbar}{p}$ ஆகும்.

இப்போது ஆற்றலுக்கான ஆபரேட்டரைச் (energy operator) செயல்படுத்துவோம்.

$$E = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}$$ என்பது ஆற்றலுக்கான ஆபரேட்டர்: இங்கு ஆபரேண்ட் ψ ஆக அமைகிறது.

எனவே $E\psi = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}$

அல்லது $\frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\frac{E}{\hbar}\psi$ ... (8)

இச் சமன்பாடு கீழ்க்கண்ட தீர்வினைத் தருவதாக அமையும் :

$$\psi = \psi_0 e^{-i\frac{E}{\hbar}t} = \psi_0 e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t} \quad \ldots (9)$$

எனவே இவ்வலைகளின் அலைவு நேரம் (period)

$= \frac{h}{E} = \frac{h}{mc^2}$ என்பதாகும்.

ஆதலினால், அதிர்வு எண் $\gamma = \frac{mc^2}{h}$ ஆகும்.

சமன்பாடு எண்கள் (7) மற்றும் (9) ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்தி, கீழ்க்காணும் ψ-க்கான சமன்பாட்டினைப் பெறலாம்:

$$\psi = \psi_0 e^{i/\hbar\, mux - \frac{i}{\hbar} mc^2 t}$$

$$= \psi_0 e^{i/\hbar\ Px\left(\chi - \frac{c^2}{u}\right)t} \quad \ldots (10)$$

சமன்பாடு எண் (10); $\lambda = \frac{p}{h}$ என்ற அலைநீளம் கொண்ட அலைகளை விவரிப்பதாகவுள்ளது. இவ்வலைகள் x ஆயத் திசையில் $\frac{c^2}{u}$ என்ற திசைவேகத்தில் செல்வதாகவும் விவரிக்கப்படுகிறது.

ஒரு துகளானது முப்பரிமாண வெளியில் இயங்கிக் கொண்டிருப்பதாகக் கொண்டு, ஷ்ராடிங்கர் சமன்பாட்டையும் பெறலாம். இத் துகள் அகவியல் விசைப் புலத்தினூடே (conservative force field) இயங்குவதாகக் கொள்வோம். இத் துகள் மூன்று திசைகளிலும் மாறுபடுகின்ற திசை வேகத்தைக் (u, v, w) கொண்டு இயங்குவதாகவும் கொள்வோம். இத் துகளின் நிலையாற்றல் $= V(x, y, z)$ எனக் கொள்வோம். இத் துகளின் இயங்கு ஆற்றல் (T)=மொத்த ஆற்றல் (E)—நிலை யாற்றல் (V)

$$T = \frac{1}{2} m (u^2 + v^2 + w^2) E - V \qquad \ldots (11)$$

சமன்பாடு எண் (5)-ன்படி,

$$mu = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2} mu^2 = - \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\therefore \quad - \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = E - V$$

$$\therefore \quad \nabla^2 \phi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \phi = 0 \qquad \ldots (12)$$

இவ்வாறு ஹெய்ஸ்சன்பர்க்கின் அணி விசையியல், குவான்டம் நிபந்தனைகளை அடிப்படையாகக் கொண்டு தொடங்கி, ஷ்ராடிங்கரின் அலைச் சமன்பாட்டினைப் பெற்றுள்ளது. அலை மற்றும் அணி விசையியல் ஒன்றுக்கொன்று இணையானது அல்லது சமமானது என்பதற்கு இன்னும் சில எடுத்துக் காட்டுகளையும் கூறலாம்.

சிறப்பியல்புச் சார்பலன்களிலிருந்து (Eigen functions) அணி உறுப்புகளைப் (Matrix elements) பெறும்.

வழிமுறை : qr மற்றும் Pr $(r = 1, 2, 3\ldots\ldots)$ என்பன வற்றை ஓர் இயக்கத் தொகுதியின் ஆயத் தொலைவுகள் மற்றும் இணை உந்தங்களாகக் (conjugate momenta) கொள்வோம். எனவே ஆற்றல் சமன்பாட்டினை (energy equation).

$$H (qr, pr) - E = 0 \qquad \ldots (13)$$

என அமைக்கலாம். இங்கு H என்பது முதுபழங் கொள்கையில் உள்ள ஹெமில்டோனியன் மற்றும் E என்பது இயக்கத் தொகுதியின் (dynamical system) மொத்த ஆற்றலாகும்.

ஆயத் தொலைவுகள் மற்றும் உந்தங்களைக் குவான்டம் விசையியலிருந்து (particle mechanics) அலை விசையியலுக்கு (wave mechanics) எவ்வாறு மாற்றலாம் என்பதைக் காண்போம். ஆயத் தொலைவுகள் மற்றும் உந்தங்களுக்கு ஒப்பான ஆபரேட்டர்கள் அலை விசையியலில் உள்ளன. எடுத்துக் காட்டாக, உந்தம் மற்றும் ஆற்றல் ஆகியவைகளுக்கான

ஆபரேட்டர்கள் இங்குச் சமன்பாடு எண் (14)-ல் கொடுக்கப் பட்டுள்ளன.

$$\left.\begin{aligned} Pr &= \frac{\hbar}{i} \quad \frac{\partial}{\partial qr} \\ E &= -\frac{\hbar}{i} \quad \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned}\right\} \qquad \dots (14)$$

இங்கு H மற்றும் E என்பன வகையீடு ஆபரேட்டர்களாக (differential operator) உள்ளன. இவை ψ என்ற சார்பலன்மீது செயல்புரிவனவாக உள்ளன. எனவே,

$$\left[H \left(qr, \frac{\hbar}{i} \quad \frac{\partial}{\partial qr} \right) - E \left(- \frac{\hbar}{i} \quad \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \psi = 0 \qquad \dots (15)$$

நாம் இச் சமன்பாட்டிற்கான தீர்வுகளைக் கண்டறியலாம். இத் தீர்வுகளிலிருந்து நாம் அணியினை அமைக்கலாம். இவ்வணி யானது நமது இயக்கு பண்பு கொண்ட பிரச்சினைக்குத் (dynamical problem) தீர்வாக அமையும்.

ψ_n என்ற சார்பலனை ($n = 1, 2, 3 \ldots\ldots$) வகைக்கெழு சமன்பாட்டின் எண் (15) ஐகன் சார்பலனுகக் கொள்வோம். மேற்கூறிய சார்பலன்கள் யாவும், ஒருபடி சாராத செங்குத் தியல்பான ஐகன் சார்பலன்களாக உள்ளன எனவும் கொள்வோம் (complete linearly independent set of orthonormal eigen function of the differential equation).

$$\therefore \int \psi^*_m \psi_n \, dq = \delta_{mn} \qquad \dots (16)$$

சமன்பாடு எண் (15)ற்கான பொதுத் தீர்வை

$$\psi = \sum_n C_n \psi_n \qquad \dots (17)$$

என அமைக்கலாம்.

$$\therefore \int \psi^*_m \psi \, dq = \sum_n C_n \int \psi^*_m \psi_n \, dq$$

$$= C_m \int | \psi_m |^2 \, dq = C_m$$

$$\therefore \quad C_m = \int \psi_m^* \psi \, dq \qquad \ldots(18)$$

எந்த ஒரு தொகையிடல் மாறிலியையும் (integration constant) ஓர் அணியாக அமைத்திடலாம். இயக்கத் தொகுதியின் தொகையிடல் மாறிலியை ஓர் அணியாக விவரிக்கலாம் என்று நிரூபணமும் செய்யலாம். இவ்வணிக்கு ஒரு நிரையும் (one row) மற்றும் ஒரு நிரலும் (one column) உண்டு. ψ_n-ல் உள்ள ஒவ்வொரு சார்பலனுக்கும் ஏற்ற ஓர் அணியுண்டு.

ஒரு தொகுதியின் தொகையிடல் மாறிலியை A எனக் கொண்டால்,

$$\mathring{A} = \{A, H\} \quad \text{என அமைக்கலாம்.}$$

இங்கு A° என்பது A-யின் காலவகைக் கெழுவாகும் (time derivative). மற்றும் $\{A,H\}$ என்பது பாய்சன் அடைப்பு (Poisson bracket) ஆகும். மேலும் A என்பது காலத்தைக் கொண்டு மாறுதிருப்பதால்,

$$\{A, H\} = 0 \qquad \ldots (19)$$

ஆகும். எனவே A ஆனது H உடன் பரிமாற்றிக் கொள்ளும் தன்மையுடையது. மேலும் E என்பது மொத்த ஆற்றலாகும். இதனுடன் A பரிமாற்றிக் கொள்ளும் தன்மையுடையது.

$$\therefore \quad [A, H - E] = 0$$

$$A\,(H - E) = (H - E)\,A \qquad \ldots (20)$$

$$\therefore \quad A\,(H - E)\,\psi_n = (H - E)A\psi_n \qquad \ldots (21)$$

ψ_n என்ற சார்பலன் சமன்பாடு எண் (15)-க்கு ஒரு தீர்வாகும். எனவே,

$$(H - E)\,A\psi_n = 0$$

அதாவது $A\psi_n$ என்பதும் சமன்பாடு எண் (15)-க்கு ஒரு தீர்வாக அமைகிறது.

சமன்பாடு எண் (16)-ல் இருந்து நாம் அறிந்தபடி (15)-ன் ஒவ்வொரு தீர்வையும் கீழ்க்கண்ட ψ_n ஐக் கொண்ட ஒரு தொடராகக் (series) கோவைப்படுத்தலாம்.

$$A\psi_n = \sum A_{mn}\psi_n \qquad \ldots (22)$$

இங்கு $A_{mn} = \int \psi_m^* \psi_n \, dq$ ஆகும்.

நாம் இப்போது ஒரு நிரூபணத்தை எடுத்துக்கொள்வோம். A_{mn} என்ற கணியமானது A-வுடன் தொடர்புள்ள ஹெய்ஸ்சன் பர்க் அணியின் (Heisenberg matrix) உறுப்புகளாக அமைந்துள்ளன என்று நிரூபிக்கலாம்.

A என்பது ஒரு மெய்யான கணியமாக (real quantity) இருப்பின், m, n ஆகியவைகளின் எல்லா மதிப்பிற்கும்.

$$A_{mn}^* = \int (\psi_m^* \; A\psi_n)^* \, dq$$

$$= \int \psi_n^* \; A\psi_m \, dq$$

$$= A_{nm} \qquad \ldots (23)$$

இந்த அணி A-யானது ஒரு ஹெர்மீஷியன் அணியாகும்.

மேலும் B என்பது மற்றொரு தொகையிடல் மாறிலியாக இருப்பின்,

$$B\cdot\psi_m = \sum_m B_{mn}\psi_m \qquad \ldots (24)$$

இங்கு $B_{mn} = \int \psi_m^* \, B\, \psi_m \, dq$ ஆகும்.

A_{mn} மற்றும் B_{mn} என்பன ஹெய்ஸ்சன்பர்க் அணியின் உறுப்புகளாக இருக்குமாயின், அணிகளுக்கான கூட்டல் மற்றும் பெருக்கல் விதிகள் ஆகியவற்றிற்கும் பொருந்துவனவாக இருக்க வேண்டும்.

$$(A + B)_{mn} = \int \psi_m^* \, (A + B)\psi_n \, dq$$

$$= \int \psi_m^* \, A\psi_n \, dq + \int \psi_m^* \, B\psi_n \, dq$$

$$= A_{mn} + B_{mn}$$

$$\therefore \quad (A+B)_{mn} = A_{mn} + B_{mn} \qquad \ldots (25)$$

இதே போன்று,

$$(AB)_{mn} = \int \psi_m^* (AB) \psi_n \, dq$$

$$A \psi_n = \sum_m A_{mn} \psi_m$$

$$\therefore \quad \psi_m A = \sum_k \psi_k^* A_{mk}$$

$$B \psi_n = \sum_j B_{jn} \psi_j$$

$$\therefore \int \psi_m^* (AB) \psi_n \, dq = \sum_k \sum_j \psi_k^* A_{mk} B_{jn} \psi_f \, dq$$

$j = k$ ஆக இருக்கும்போது

$$(AB)_{mn} = \sum_k A_{mk} B_{kn} \qquad \ldots (26)$$

இது அணிகளின் பெருக்கல் விதியாக அமைந்துள்ளது. எனவே, ஷ்ராடிங்கர் சமன்பாட்டிற்கான எல்லா ஐகன் சார்பலனையும் கண்டுகொண்டால் அச் சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு கண்டதாக அமையும். அவ்வாறே நாம் அணியின் உறுப்புகள் யாவையும், கண்டுகொண்டால் பிரச்சினைக்குத் தீர்வு கண்டவர்களாவோம்.

மேற்கூறிய இரண்டு விசையியல்களும் ஒன்றுக்கொன்று சமமானவைதாம் என்று நாம் நிரூபணம் செய்யலாம். இதற்குப் பின் கண்டவைகளை இரு விசையியல்களின் அடிப்படையில் உண்மையென்று காட்ட வேண்டும். அவைகளாவன :

(i) குவான்டம் நிபந்தனை

$$pq - qp = \frac{\hbar}{i} \; \delta_{mn} \qquad \ldots (27)$$

(ii) P^2 என்ற சார்பலன் கீழ்க்கண்ட அணியுறுப்புகளால் பெறப்படுகிறது.

$$(P^2)_{mn} = \int \psi_m^* \, p^2 \, \psi_n \; dq = \int \psi_m \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q} \right)^2 \psi_n \; dq \qquad \ldots (28)$$

(iii) எந்தவொரு நிலைப்பண்பு சார்பலன் (potential function) $V(q)$ என்பதைப் பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம் :

$$V_{mn}(q) = \int \psi_m^* \, V \psi_n \; dq \qquad \ldots (29)$$

இறுதியாக,

$$\text{(iv)} \quad H(q, p) = \left(\frac{1}{2m} \right) \sum_{1}^{\delta} p^2 + V(q) \qquad \ldots (30)$$

நிரூபணம் :

$$\text{(i)} \quad (pq)_{mn} = \sum_k P_{mk} \; q_{kn}$$

$$= \frac{\hbar}{i} \int \psi^*_m \frac{\partial}{\partial q} \sum_k \psi_k \; q_{kn} \; dq$$

சமன்பாடு எண் (22)ஐச் சமன்படுத்தி

$q \, \psi_n = \sum_k q_{kn} \; \psi_k$ என அமையும்.

$$\therefore (pq)_{mn} = \frac{\hbar}{i} \int \psi^*_m \frac{\partial}{\partial q} q \, \psi_n \, dq \qquad \ldots (31)$$

இதே போன்று,

$$(qp)_{mn} = \sum_k q_{mk} P_{kn} = \int \psi_m^* \, p \Sigma \, q_{kn} \, dq$$

$$= \int \psi_m^* \, qp \, \psi_n \, dq$$

$$= \int \frac{\hbar}{i} \quad \psi_m^* \, q \frac{\partial}{\partial q} \psi_n \, dq \qquad \text{... (32)}$$

$$\therefore (pq - qp)_{mn} = \frac{\hbar}{i} \int \psi_m^*$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial q} q - q \frac{\partial}{\partial q} \right\} \psi_n \, dq$$

$$= \frac{\hbar}{i} \int \psi_m^* \psi_n \, dq$$

$$= \frac{\hbar}{i} \cdot \delta_{mn} \qquad \text{...(33)}$$

(ii) $$(p^2)_{mn} = \sum_k P_{mk} P_{kn}$$

$$= \int \psi_m^* \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q} \sum P_{kn} \, dq$$

$$= \int \psi_m^* \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q} p \, \psi_n \, dp$$

$$= \int \psi_m^* \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q} \psi_n \, dq$$

$$= \int \psi_m^* \left(\frac{\hbar}{i} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial q^2} \psi_n \, dq$$

$$= \int \psi_m^* \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q} \right)^2 \psi_n \, dq \qquad \text{... (34)}$$

(iii) $V(q) = q^r$ என்றால் இது q^{r+1}-க்கும் உண்மையானதாகும் என்று காட்டவேண்டும்.

$$\left(q^{r+1} \right)_{mn} = \left(q^{r} . q \right)_{mn} = \sum_{k} \left(q^{r} \right)_{mk} q_{kn}$$

$$= \int \psi_m q^r . q\psi_k \, dq$$

$$= \int {}_m^* q^{r+1} \psi_n \, dq \qquad \ldots (35)$$

இவ்வாறு மேற்கூறியதை உண்மையெனக் காட்டலாம்.

(iv) இங்கு ஹெமில்டோனியன் H இங்குக் கொடுத்துள்ள படி இது ஒரு மூலைவிட்ட அணி (diagonal) என்று நிரூபிக்க வேண்டும்.

$$H_{mn} = \int \psi \quad H\psi_n \, dq$$

$$= \int \psi_m^* \left\{ \frac{1}{2m} \sum_{1}^{s} p^2 + V(q) \right\} \psi_n \, dq$$

$$= \int \psi_m^* \left\{ \frac{1}{2m} \sum_{1}^{s} \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial q^2} \right) + V(q) \right\} \psi_n \, dq \qquad \ldots (36)$$

இப்போது m என்ற பொருண்மையுடைய துகள் $V(q)$ என்ற அழுத்தமுள்ள புலனில் (field of potential) இருப்பதாகக் கொண்டால் அதன் ஐகன் மதிப்பு E_n மற்றும் ஐகன் சார்பலன் ψ_n ஆகியவற்றைக் கீழ்க்கண்டவாறு அமைக்கலாம்.

$$\left\{ \frac{1}{2m} \sum_{1}^{s} \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial q^2} \right) + V(b) \right\} \psi_n = E_n \psi_n$$

∴ சமன்பாடு எண் (36) ஆனது பின்கண்டவாறு அமையும்:

$$H_{mn} = \int \psi_m^* \; E_n \psi_n \; dq = E_n \int (\psi_m^* \; \psi_n \, dq)$$
$$= E_n \; \delta_{mn}$$

ஆதலினால் $H_{nn} = E_n \cdot 1$ ... (37)

∴ H என்பது ஒரு மூலைவிட்ட அணியாகும் (diagonal matrix). அதன் மூலைவிட்டத்தில் உள்ள உறுப்புகளாவன E_1, E_2,...... அலைவிசையியலிலும் இதே போன்ற ஒரு முடிவினைக் கொடுப்பதும் ஐகன் மதிப்பினைக் கொடுப்பதும் சமமானது என்பதை நாம் கருத்தில் கொள்ளவேண்டும்.

ஆதலினால் மேற்கூறிய இரண்டு வழிமுறைகளும் அதாவது அலைவிசையியலும் அணிவிசையியலும் ஒன்றுக்கொன்று முழுவதும் சமமான அல்லது ஒப்பானது எனக் கூறலாம்.

ஐகன் நிலைகளின் மேற்பொருந்துகைத் தத்துவத்தைப் (principle of superposition of eigen states) பயன்படுத்தியும் இரு விசையியல் ஒற்றுமையைத் தெளிவாகக் கூறலாம். ஆகவே ஐகன் நிலைகளின்மேற் பொருந்துகைபற்றி இங்குக் காண்போம்.

ஐகன் நிலைகளின் மேற்பொருந்துகைத் தத்துவம் (Principle of Eigen States)

எந்த ஓர் அலைக் கோட்பாட்டிற்கும் (wave theory) அடிப்படைக் கருத்து ஒன்று உண்டு என்பதை இங்குக் காண்போம். ψ_1 மற்றும் ψ_2 என்ற இரு அலைச் சார்பலன்களை எடுத்துக்கொள்வோம். இவற்றை ஓர் அலைச் சமன்பாட்டிற்கு ஏற்ற சார்பலன்களாகக் கொள்வோம். பின்னர் இவை உள்ள ஏதாவது ஒரு நேரியல் சேர்ப்பைக் (linear combination) கீழ்க் கண்டவாறு அமைக்கலாம்.

$C_1\psi_1 + C_2\psi_2$ இங்கு C_1 மற்றும் C_2 ஆகியவை யாதாமொரு மாறிலிகள் (arbitrary constants) ஆகும். இந்த நேரியல் சேர்ப்பும் மேற்கூறிய சமன்பாட்டிற்கு ஏற்ற சார்பலனாக அமையும். இதனை ஓர் அடிப்படை எடுகோளாக உருவகப்படுத்தி, அதனை 'நிலைகளின் நேரியல் மேற்பொருந்துகை' (linear super position of states) என்பர்.

இதனைப் பின்கண்டவாறு நிருபணம் செய்யலாம். A என்பதை ஓர் ஆபரேட்டராகவும், ψ_1, ψ_2 என்பன ஆபரேட்டரின் இரண்டு ஐகன் நிலைகள் (eigen states) எனவும் கொள்வோம்.

இவையிரண்டு நிலைகளும் ஓர் ஐகன் மதிப்பைக் (eigen values) கொண்டுள்ளன.

$$\therefore \left.\begin{array}{l} A\phi_1 = \lambda\phi_1 \text{ மற்றும்} \\ A\phi_2 = \lambda\phi_2 \end{array}\right\} \quad \ldots (38)$$

ஐகன் நிலைகளின் நேரியல் சேர்ப்பை

$$\phi = C_1\,\phi_1 + C_2\,\psi_2 \ldots \quad \ldots (39)$$

என அமைக்கலாம். இங்கு C_1 மற்றும் C_2 என்பன மாறிலிகள்.

பின்னர்: $A\phi = \lambda\phi$ ...(40)

அல்லது $A\,(c_1\,\phi_1 + c_2\,\phi_2) = (c_1\,A\phi_1 + c_2\,A\phi_2)$

$$= (c_1\,\lambda\phi_1 + c_2\,\lambda\phi_2)$$

$$= (c_1\,\phi_1 + c_2\,\phi_2)$$

$$= \lambda\phi \quad \ldots (41)$$

ஆதலினால் $\phi = C_1\,\phi_1 + C_2\,\phi_2$ என்பதும் ஆபரேட்டர் A-யின் ஓர் ஏற்ற ஐகன் சார்பலன் அல்லது ஓர் ஐகன் நிலையாகும்.

குறுக்கீட்டு விளைவு மற்றும் அலைப்பெட்டகங்களைப் படைத்தல் ஆகியவற்றை விளக்க மேற்கூறிய மேற் பொருத்துகைத் தத்துவம் (principle of super position) மிகவும் பயன்படுகிறது.

மேற்கூறிய தத்துவத்தைப் பயன்படுத்தி இருவிசையியலுக்கு மிடையேயுள்ள ஒற்றுமையைக் காண்போம்.

இரண்டு விசையியல்களும் ஒரு குலத்தே உதித்த இரட்டைப் பிறவிகள் (twins) போல் விளங்குகின்றன என்பதைக் கணித வியல் ரீதியில் விளக்கலாம். டிராக் (P. A. M. Dirac) என்பார் இவற்றின் சமத்துவத்தைக் கணிதவியல் அடிப்படையில் உலகிற்குக் காட்டினர்.

ஷ்ராடிங்கரின் அலைவிசையியலானது டிராக்கினுடைய பொதுக் கொள்கையின் அலை விளக்கமாக (wave representation) அமையும்.

ஹெய்ஸ்சன்பர்க்கின் குவான்டம் விசையியலானது (அணி விசையியல்) டிராக்கினுடைய பொதுக் கொள்கையின் உந்த விளக்கமாக (momentum representation) அமையும்.

கணித அடிப்படை விளக்கம்

குவாண்டம் விசையியல் தொகுதி ஒன்று $\bar{X}$ என்ற பொது நிலையில் (general state) இருப்பதாகக் கொள்வோம். இத் தொகுதியின் $\bar{X}$ இயக்க மாற்றவீதம் (rate of change of motion) $\frac{d\bar{X}}{dt}$ என்பதை வரையறுப்போம். இதனை அறிமுகம் செய்யும் போது "நிலைகளின் மேற்பொருந்துகைத் தத்துவத்தை" (principle of superposition of states) நிறைவு செய்வதாக இருக்க வேண்டும். அதன் பொருளாவது,

$$\bar{X} = C_1X_1 + C_2X_2$$

$$\therefore \quad \frac{d\bar{X}}{dt} = C_1\frac{dX1}{dt} + C_2\frac{dX_2}{dt} \qquad \ldots (42)$$

ஆகையினால் ஒரு வெக்டரின் கால வகைக்கெழு (time derivative of a vector) ஆனது குவாண்டம் விசையியல் தொகுதியின் அலை வெக்டாரின் நேரியல் ஆபரேட்டராக இருக்கிறது.

$$\therefore \quad i\hbar\frac{d\bar{x}}{dt} = H\bar{x}$$

மேலும், H என்பது ஒரு ஹெர்மீஷியன் ஆபரேட்டராகும் (Hermitian operator). ஏனெனில், இரு வெக்டர்களின் கால வகைக்கெழுக்களின் புள்ளிப் பெருக்கம் (dot product) சுழிக்குச் சமமாகும்.

$$\frac{d}{dt}(\bar{A}\cdot\bar{B}) = \frac{d\bar{A}}{dt}\cdot B + \bar{A},\frac{dB}{dt}$$

$$= \left(\frac{H}{i\hbar}A\cdot B\right) + \left(A,\frac{H}{i\hbar}B\right)$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\Big[-(HA,B) + (A,HB)\Big]$$

$$\therefore \quad \frac{d(\bar{A}\cdot\bar{B})}{dt} = 0$$

[$\therefore$ H ஹெர்மீஷியன் ஆக இருப்பதால்] ... (43)

மேலும், இயக்கத் தொகுதிகளின் நிலைகளைக் கீழ்க்கண்ட வாறு அமைந்துள்ளதாகக் கொள்வோம்.

$$\bar{x} = \int \phi(q) \overset{\times}{c}(q)\, dq \qquad \ldots(44)$$

இங்கு ϕ என்பது அலைச் சார்பலன் (wave function) ஆகும். இதனை $\hat{e}(q)$ என்ற அடிப்படை வெக்டர்களின் தொடர் தொகுதியாகவும் கொள்ளலாம்.

$$i\hbar \frac{\partial x}{\partial t} = H\bar{x}$$

$$\therefore \quad i\hbar \frac{d}{dt} \int \phi(q) \bar{e}(q)\, dq = H \int \phi(q) \hat{e}(q)\, dq$$

$$i\hbar \int \frac{\partial \phi}{\partial t} \hat{e}(q)\, dq = \int H \phi(q) \hat{e}(q)\, dq$$

$$\int \left(i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} \; H\phi \right) \hat{e}(q)\, dq = 0$$

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = H\phi \qquad \ldots(45)$$

இது ஒரு ஷ்ராடிங்கர் சமன்பாடாக உள்ளது. இத்தகைய வகைக் குறிப்பில் (representation) காலத்தின் அடிப்படையில் அலை வெக்டர்களின் மாறுபாட்டை எடுத்துக்கொள்கிறோம். ஆனால் மேலும் ϕ என்ற அலைச் சார்பலன்மீது செய்கை புரியும் ஆபரேட்டர்கள் காலத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டவை அல்ல.

உண்மையில்,

$$q \longrightarrow q$$

$$p \longrightarrow \frac{h}{2\pi i} \quad \frac{\partial}{\partial q}$$

எனக் காலமில்லாது அமையும்.

இத்தகைய வகைக் குறிப்பில், காலத்தின் அடிப்படையில் அலை வெக்டர் மாறுபாடு அடைவதால் இதற்கு அலை வகைக் குறிப்பு அல்லது விளக்கம் (wave representation) என்று பெயர். மேலும் சமன்பாடு $i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = H\phi$ என்பது அலைச் சமன்பாடு ஆகும்.

ஆகையினால் இரண்டு விசையியல்களும் கணிதவியல் அடிப்படையில் ஒன்றுக்கொன்று சமமானவையே, மற்றும் அவை கூறும் முடிவுகளும் ஒன்றானவையே என்பது தெளிவாகிறது.

இதுவரை இரு விசையியலுக்கிடையேயுள்ள ஒற்றுமைகளையே கண்டோம். இப்போது அவைகளுக்கிடையேயுள்ள ஒரு சில வேற்றுமைகளைக் காண்போம்.

(i) ஹெய்ஸ்சன்பர்க் இயக்கச் சமன்பாட்டில் ஆற்றல் E அல்லது ஹெமில்டோனியன் ஆபரேட்டர் H (அணியானது) மூலைவிட்ட முடையதாக்கப்பட்டுள்ளது. அதாவது,

$$H = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0\ldots\ldots\ldots \\ 0 & E_2 & 0 & 0\ldots\ldots\ldots \\ 0 & 0 & E_3 & 0\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & & & \ldots\ldots\ldots E_n \end{bmatrix} \quad \ldots (46)$$

ஆனால் ஷ்ராடிங்கர் வகை இயக்கச் சமன்பாட்டில் Q என்பது மூலைவிட்ட முடையதாக்கப்படுகிறது.

(ii) ஹெய்ஸ்சன்பர்க் இயக்கச் சமன்பாடு, உந்த வகைக் குறிப்பு (momentum representation) உடையதாகும். ஆனால் ஷ்ராடிங்கர் சமன்பாடு அலைவகைக் குறிப்பு (wave representation) உடையதாகும்.

இவ்விரு விசையியல்களுக்கிடையேயுள்ள மேற்கண்ட ஒரு சில வேற்றுமைகள் அவற்றின் சமத்துவ அடிப்படைக்கு இடையூறு உண்டாக்குவனவாக அமையவில்லை. ஆதலினால் ஹெய்ஸ்சன்பர்க்கின் குவான்டம் விசையியலும், ஷ்ராடிங்கரின் அலைவிசையியலும் ஒன்றுக்கொன்று முழுவதும் ஒத்ததேயாகும்.

பயிற்சி

1. குவான்டம் விசையியலுக்கு (அணி விசையியல்) அடிப்படையாக விளங்கும் உண்மைகளைத் தெளிவாகக் கூறுக.

2. சில சிறப்பு ஆபரேட்டர்களின் அணிவகைக் குறியீடுகள் பற்றி விளக்குக.

3. மூலைவிட்ட அணியாக்குதலை விளக்குக. ஓர் அணியை மூலைவிட்ட அணியாக்குவது ஏன்?

4. இயக்கவியல் சமன்பாடு என்றால் என்ன? இயக்கவியல் மாறிலிபற்றி விளக்கம் தருக. ஒரு காப்புநிலைத் தொகுதிக்கான இயக்கவியல் சமன்பாட்டை அமைத்திடுக.

5. குவான்டம் விசையியல் அடிப்படையில் சீரிசை அலை வியற்றியின் ஆற்றல் $E_n = (n+\frac{1}{2})h\nu$ என்பதை வரவழைக்க.

6. ஹெய்ஸ்சன்பர்க்கின் குவான்டம் விசையியலும் (அணி விசையியலும்) ஷ்ராடிங்கரின் அலைவிசையியலும் ஒன்றுக்கொன்று சமமானவை என்பதை எடுத்துக்காட்டுகளுடன் விளக்குக.

மேற்கோள் நூற்பட்டியல்

சார்பியல்

Serial No.	Author's Name	Title of the Book	Year	Publisher's Name
1	Peter Gabriel Bergmann	Introduction to the Theory of Relativity	1969	Prentice - Hall of India Private Limited, New Delhi
2	Robert Resnick	Introduction to Special Relativity	1968	John Wiley & Sons, New York
3	Mc Crea, W. H.	Relativity Physics	1965	Methuen & Co. Ltd., London
4	Landan, L. and Rumer, Y.	What is the Theory of Relativity	1970	Mir Publishers, Moscow
5	Robert Katz	An Introduction to the Special Theory of Relativity	1968	D. Van Nostrand Company, Inc. New York. Affiliated East West Press, Private Ltd., New Delhi
6	Gupta, B. D. and Satya Prakash	Relativistic Mechanics	1971	Pragati Prakashan, Meerut (India)
7	Rajam, J. B.	Atomic Physics	1966	S. Chand & Co. Delhi

Serial No.	Author's Name	Title of the Book	Year	Publisher's Name
8	Max Born	Atomic Physics	1969	E. L. B. S. Edn. Bell & Sons. London
9	S. Tolansky and Sir Lawrence Bragg	Introduction to Atomic Physics	1966	Longman Group Ltd., London
10	Goyal, J. K. and Gupta, K. P.	Theory of Relativity	1973	Krishna Prakashan Mandir. Meerut (U. P.)
11	Moller, C.	The Theory of Relativity	—	Oxford University Press, Oxford
12	Joos, G.	Theoretical Physics	1950	Hafner Publishing Company, New York

குவான்டம் விசையியல்

Serial No.	Author's Name	Title of the Book	Year	Publisher's Name
13	Pauling, L. and Wilson, E. B.	Introduction to Quantum Mechanics	1935	McGraw-Hill Book Co., Tokyo
14	Powell, J. L. and Crasemann, B.	Quantum Mechanics	1961	Addison-Wesley Pub. Co.
15	Eyring H. Walter, J. and Kimball, G. E.	Quantum Chemistry	1948	John Wiley & Sons, New York

16	Arthur Beiser	Concepts of Modern Physics	1963	Mc Graw-Hill Book Co., Tokyo
17	Eugene Merzbacher	Quantum Mechanics	1960	John Wiley and Sons, New York
18	Dicke, R. E. and Wittke, J. P.	Introduction to Quantum Mechanics	1961	Addison-Wesley Pub. Co.
	Sherwin, C. W.	Introduction to Quantum Mechanics	1960	Holt, Rinhart and Wiston
20	Srivastava, B. N.	Essentials of Quantum Mechanics	1972	Pragati Prakashan, Meerut
21	Satya Prakash and Singh, C. K.	Introduction to Quantum Mechanics	1973	Kedar Nath Ram Nath & Co.
22	Herbert Strauss, L.	Quantum Mechanics: AnIntroduction	1972	Prentice-Hall of India, Pvt. Ltd.
23	Atkin, R. H.	Mathematics and Wave Mechanics	1964	Heinemann, London
24	Davydov, A. S.	Quantum Mechanics	1965	Addison-Wesley
25	Messiah	Quantum Mechanics Vols I & II	1961	North Holland
26	Schiff	Quantum Mechanics	1960	McGraw Hill

கலைச்சொற்கள்

A

Abbreviation	—	சுருக்கம்
Abberration	—	பிறழ்ச்சி
Aberration of light	—	ஒளிப் பிறழ்ச்சி
Absolute	—	தனி, சார்பிலா
Absolute determination	—	சார்பிலா நிர்ணயம்
Absorption	—	உட் கவருதல்
Acceleration	—	முடுக்கம்
Acceleration due to gravity	—	ஈர்ப்பு முடுக்கம்
Accuracy	—	துல்லியம்
Action	—	வினை, செயல்
Additive process	—	கூட்டு முறை
Adiabatic	—	வெப்ப மாற்றமில்லாத
Adjustment	—	சீரமைவு, சரியமைப்பு
Aim	—	நோக்கம்
Algebraic	—	இயற் கணித
Alignment	—	இணைப் பொருமை
Altitude	—	குத்துயரம்
Analysis	—	பகுப்பாய்வு
Angle of aberration	—	பிறழ்ச்சிக் கோணம்
Angle of elevation	—	ஏற்றக் கோணம்
Angle of incidence	—	படுகோணம்
Angle of inclination	—	சாய் கோணம்
Angstrom unit	—	ஆங்ஸ்ட்ராம் அலகு
Angular acceleration	—	கோண முடுக்கம்
Angular distribution	—	கோணப் பரவீடு, கோணப் பங்கீடு
Angular momentum	—	சுழல் உந்தம்
Angular velocity	—	கோணத் திசைவேகம்
Angular width	—	கோண அகலம்
Annihilation	—	அழிவு
Anomaly	—	முரண்பாடு

Antineutrino — ஆன்ட்டி நியூட்ரினோ
Antinode — எதிர்க்கணு
Aperture — துளை
Aphelion — தொலைவுப் புள்ளி, சேய்மைப் புள்ளி (சூரியனிடமிருந்து)
Apparatus — ஆய் கருவி
Applied mathematics — பயன்முறைக் கணிதம்
Approximate — தோராயமான
Arbitrary — யாதாமொரு
Arc — வில்
Areal velocity — பரப்புத் திசைவேகம்
Assembly — தொகுதி
Association — தொடர்பு
Associative law — சேர்ப்பு விதி
Assumption — தற்கோள், எடுகோள்
Astronomical Telescope — வானியல் தொலைநோக்கி
Asymptote — ஈற்றணுகி
Atom — அணு
Atomic event — அணு நிகழ்ச்சி
Atomic model — அணு மாதிரியமைப்பு
Attraction — ஈர்ப்பு
Average — சராசரி
Axiom — வெளிப்படை உண்மை
Axis — அச்சு
Azimuth — திசைச் சார்பான
Azimuth Angle — திசைக் கோணம்

B

Barrier — தடுப்பு, அரண்
Barrier potential — தடுப்பு மின்னழுத்தம்
Beam — கற்றை
Beam of light — ஒளிக்கற்றை
Beats — விம்மல்
Bending — வளைவு
Beta particle — பீட்டாத் துகள்
Binding energy — பிணைப்பாற்றல், இணைப்பாற்றல்
Bisect — இரு சமக் கூறிடு
Bisection — இரு சமக் கூறிடல்

Black body radiation — கரும்பொருள் கதிர்வீச்சு
Boltzmann constant — போல்ட்ஸ்மென் மாறிலி
Bound electron — கட்டுண்ட எலெக்ட்ரான்
Boundary condition — எல்லை நிபந்தனை
Bracket — அடைப்பு
Bragg's law — பிராக்கின் விதி
Breakdown potential — முறி மின்னழுத்தம்
Bubble — குமிழ்
Bump — புடைப்பு
Buoyancy — மிதக்கும் தன்மை

C

Calculate — கணக்கிடு
Calculation — கணக்கிடு, கணிப்பு
Camera — ஒளிப்படப்பெட்டி, கேமிரா
Carrier wave — ஊர்தி அலை
Central forcefield — மைய விசைப்புலம்
Central fringe — மையப் பட்டை
Central maxima — நடுப் பெருமம்
Centre of gravity — ஈர்ப்பு மையம்
Centre of mass — பொருண்மை மையம்
Centrifugal force — மைய விலக்கு விசை
Centripetal force — மைய நோக்கு விசை
Chance — வாய்ப்பு
Characteristic equation — சிறப்பியல்புச் சமன்பாடு
Characteristic roots — சிறப்பியல்பு மூலங்கள்
Circular orbit — வட்டச் சுற்றுப் பாதை
Classical — முது பழமையான
Classical expression — முதுபழங் கோவை
Classification — வகைப்படுத்துதல்
Coefficient — கெழு
Coherent source — ஓரியல் மூலகம்
Columns — நிரல்கள்
Combination — சேர்ப்பு, கூட்டு
Combination principle — கூட்டுத் தத்துவம்
Commutative law — பரிமாற்று விதி
Comparison — ஒப்பீடு
Complex number — சிக்கல் எண்
Complex conjugate — சிக்கல் இணை

Component — கூறு
Component of the force — விசைக் கூறு
Compton effect — காம்ப்டன் விளைவு
Compute — கணி
Concentration — செறிவு
Concentric circles — ஒரு மைய வட்டங்கள்
Condition — கட்டுபாடு, நிபந்தனை
Cone — கூம்பு
Configuration space — உருவ வமைப்பு வெளி
Conjugate matrix — இணை அணி
Conjugate quantities — இணையிய கணியங்கள்
Conservation — அழிவின்மை
Conservation of energy — ஆற்றலின் அழிவின்மை
Conservative force field — அகவியல் விசைப்புலம்
Conservative system — காப்பு நிலைத் தொகுதி
Consistency — இசைவுப் பொருத்தமுடைமை
Constant — மாறிலி
Constituent — ஆக்கக்கூறு
Continuum — தொடர்பம்
Contraction — சுருக்கம்
Co-ordinate — ஆயம்
Co-ordinate system — ஆயத் தொகுதி
Correction factor — திருத்தக் கூறு
Correspondence principle — ஒப்புமைத் தத்துவம்
Corresponding states — ஒப்புமை நிலைகள்
Crest — முகடு
Criterion — கட்டளை விதி
Cross-wire — குறுக்குக் கம்பி
Curvature — வளைவு
Curvature of field — புல வளைவு
Cycle — சைகிள், சுற்று

D

Defect — குறைபாடு
Definition — வரையறை
Deflection — விலக்கம்
Degree of freedom — கட்டின்மைப்படி, உரிமைப் படிகள்
Denominator — பகுதி, வகுக்கும் எண்

Density	—	அடர்த்தி, செறிவு
Determinant	—	அணிக் கோவை
Determinant of a matrix	—	ஓர் அணியின் அணிக்கோவை
Deviation	—	திசை மாற்றம்
Diagonal	—	மூலை விட்டம்
Diagonal of a matrix	—	அணியின் மூலைவிட்டம்
Diatomic molecule	—	ஈரணு மூலக்கூறு
Differential equation	—	வகைக்கெழு சமன்பாடு
Differential operator	—	வகையீட்டு ஆபரேட்டர், வகையீட்டுச் செயலி
Differentiation	—	வேறுபாடு
Diffraction	—	விளிம்பு விளைவு
Diffraction fringes	—	விளிம்பு விளைவு வரிகள்
Diffraction pattern	—	விளிம்பு விளைவுப் பாங்கம்
Dilation	—	விரிவு
Dimension	—	பரிமாணம், வகையளவு
Direct impact	—	நேர் மோதுகை
Directional property	—	திசையியல்பு
Directivity	—	நெறிப்படுத்துத் திறன்
Discharge of electricity	—	மின் இறக்கம்
Discharge tube	—	மின்னிறக்கக் குழாய்
Discontinuity	—	தொடர்ச்சியின்மை
Discontinuum	—	தொடர்சி யற்றகம்
Discrete	—	தனித் தனியான
Displacement	—	பெயர்ச்சி
Displacement law	—	பெயர்ச்சி விதி
Distinct root	—	தனிச் சிறப்புள்ள மூலம்
Distortion	—	உருக் குலைவு
Distributive law	—	பங்கீட்டு விதி
Division	—	பிரிவு
Doppler effect	—	டாப்ளர் விளைவு
Dot product	—	புள்ளிப் பெருக்கல்
Drag	—	இழுவை
Dualism	—	இருமைப் பண்பு
Dualism of matter	—	பொருளின் இருமைப் பண்பு
Dual nature	—	இருமைப் பண்பு
Dynamical theory	—	இயக்கவியல் கொள்கை
Dynamic equilibrium	—	இயக்கச் சமநிலை
Dynamics	—	இயக்கவியல்

E

Eccentric — வேற்றுமைய, வரல் வட்டமாக
Eclipse — கிரகணம்
Effective area — செயலுறு பரப்பு
Efficiency — இயக்கு திறம்
Effort — முயற்சி
Eigen function — ஐகன் சார்பலன்
Eigen value — ஐகன் மதிப்பு
Eigen value equation — ஐகன்மதிப்பு சமன்பாடு
Eigen vector — ஐகன் வெக்டர்
Elastic waves — மீட்சியல் அலைகள்
Elasticity — மீட்சியல்
Electric linear oscillator — மின் நேரியல் அலைவியற்றி
Electric charge — மின்னூட்டம்
Electric field — மின் புலம்
Electric force — மின் விசை
Electric potential — மின்னழுத்தம்
Electro — மின்வாய்
Electromagnetic wave — மின் காந்த அலை
Electron — எலெக்ட்ரான்
Electron diffraction — எலெக்ட்ரான் விளிம்பு விளைவு
Electron microscope — எலெக்ட்ரான் நுண்ணோக்கி
Electron spin — எலெக்ட்ரான் தற்சுழற்சி
Electron volt — எலெக்ட்ரான் வோல்ட்
Electron wave — எலெக்ட்ரான் அலை
Electrostatic potential — நிலைமின் அழுத்தம்
Element — மூலகம், எளிய உறுப்பு
Element of a matrix — ஓர் அணியின் உறுப்பு
Eliminate — நீக்கு
Elimination — நீக்கல்
Emenation — வெளியீடு
Emergent ray — விடுகதிர்
Emission — வெளியிடல்
Emission spectrum — வெளிவிடு நிறமாலை
Emission theory — வெளிவிடு கொள்கை
Emissivity — கதிர்வீச்சு எண், வெளிவிடு திறன்
Emitter — வெளியேற்றும் பொருள்
Energy — ஆற்றல்

Energy function — ஆற்றல் சார்பலன், ஆற்றல் கோவை
Energy gap — ஆற்றல் இடைவெளி
Energy level — ஆற்றல் மட்டம்
Energy level diagram — ஆற்றல் மட்டப் படம்
Energy spectrum — ஆற்றல் மாலை
Envelope — உறை
Equation — சமன்பாடு
Equation of motion — இயக்கவியல் சமன்பாடு
Equilibrium — சமநிலை
Equipartition of energy — ஆற்றல் சமபங்கீடு
Equipment — சாதனம், கருவி
Equivalence — இணையான, சமமான
Equivalence principle — இணைமாற்றுத் தத்துவம், சமநிலைத் தத்துவம்
Error — பிழை
Erwin Schrodinger — இர்வின் ஷ்ராடிங்கர்
Escape velocity — தப்பியோடு திசைவேகம்
Ether — ஈதர்
Ether drag — ஈதர் இழுவை
Even numbers — இரட்டை எண்கள்
Event — நிகழ்ச்சி
Excess — மிகுபாடு
Exchange force — பரிமாற்று விசை
Exchange theory — பரிமாற்றுக் கொள்கை
Excitation — கிளர்ச்சி
Excitation energy — கிளர்ச்சி ஆற்றல்
Excited state — கிளர்ச்சி நிலை, எழுச்சி நிலை
Exhaust — வெளியேற்று
Expand — விரி, விவரி
Expansion ratio — விரிவுத் தகவு
Expectation value — எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு எதிர் நோக்கும் மதிப்பு
Experimental error — சோதனைப் பிழை
Explicit function — வெளிப்படைச் சார்பு
Exponential theorem — அடுக்குக் குறித் தேற்றம்
Expression — கோவை
External force — புறவிசை
External work — புறவேலை
Eye lens — விழிவில்லை
Eye piece — கண்ணருகு கருவி

F

Factor — கூற்றெண்; காரணி
Faraday cylinder — பாரடே உருளை
Far-point — சேய்மைப் புள்ளி
Field intensity — புல வலிமை
Field lens — புல வில்லை
Field of view — பார்வைப் புலம்
Filament — இழை
Fine structure — நுண்வரி அமைப்பு
Finite — வரம்புடைய
Finite object — வரம்புடைப் பொருள்
First approximation — முதல் நிலைத் தோராயம்
First order — முதல் வரிசை
Fission process — பிளவை முறை
Fixed frame — நிலையான சட்டம்
Flourescence — ஒளிர்தல்
Focal length — குவியத் தூரம்
Focus — குவியம், குவிதல்
Forbidden — விலக்கப்பட்ட, தவிர்க்கப்பட்ட
Force — விசை
Force of attraction — ஈர்ப்பு விசை
Force of gravity — புவி ஈர்ப்பு விசை
Formal — முறைமையான
Four-dimensional — நாப்பரிமாண
Fragments — பகுதிகள்
Frame — சட்டம்
Fraunhoffer diffraction — ஃபிரான்ஹோஃபர்-விளிம்பு விளைவு
Free energy — இயல்பு ஆற்றல்
Frequency — அதிர்வெண்
Fringe — வரி
Function — சார்பு, சார்பலன்
Fundamental frequency — அடிப்படை அதிர்வெண்
Fundamental interval — அடிப்படை இடைவெளி
Fundamental particle — அடிப்படைத் துகள்
Fundamental units — அடிப்படை அலகுகள்

G

Galaxy — விண்மீன் மண்டலம்
Galilean transformation — கெலிலியன் நிலைமாற்றம்

Galvanometer	— கால்வனு மீட்டர்
Gamma ray	— காமாக் கதிர்
Gamma ray microscope	— காமாக் கதிர் நுண்ணோக்கி
General term	— பொது உறுப்பு
Geodesic	— புவியின் மேற்பகுதிக்குரிய
Geodesic line	— புவியின் மேற்பகுதிக் கோடு
Geodesy	— புவியின் மேற்பகுதியியல்
Geographical meridian	— புவியியல் துருவத் தளம்
Geometrical optics	— வடிவியல் ஒளியியல்
Geometric axis	— வடிவியல் அச்சு
Geometric progression	— பெருக்க மாற்றத் தொடர்பு
Geometry	— வடிவ கணிதம், வரை கணிதம்
Glancing angle	— தொடுகோணம்
Glass slab	— கண்ணாடிப் பட்டகம்
Gradient	— வாட்டம், சரிவு
Graph	— வரைபடம்
Grating	— கீற்றணி
Gravitational force	— ஈர்ப்பு விசை
Gravitational intensity	— ஈர்ப்புச் செறிவு
Gravitational mass	— ஈர்ப்புப் பொருண்மை
Gravitational potential	— ஈர்ப்பு அழுத்தம்
Gravitational potential energy	— ஈர்ப்பு நிலையாற்றல்
Gravitation constant	— ஈர்ப்பு மாறிலி
Ground state	— அடி நிலை
Group velocity	— குழுத்திசை வேகம்,தொகுப்பு திசை வேகம்

H

Half life period	— அரை ஆயுட் காலம்
Hamiltonian operator	— ஹேமில்டோனியன் ஆபரேட்டர்
Harmonic oscillator	— சீரிசை அலையியற்றி
Helio-centric theory	— சூரிய மையக் கொள்கை
Helmholtz Coil	— ஹெல்ம்ஹோல்ட்ஸ் சுருள்
Hermitian matrix	— ஹெர்மீஷியன் அணி
Hertizian oscillator	— ஹெர்ட்ஸியன் அலையியற்றி
High tension battery	— உயர் அழுத்த பேட்டரி
Homogeneous equations	— சமபடிச் சமன்பாடுகள்

Homogeneous medium — ஒருபடித்தான ஊடகம்
Horizontal — கிடைமட்டம்
Horizontal component — கிடைக் கூறு
Horizontal intensity — கிடைச் செறிவு
Horizontal plane — கிடைத் தளம்
Hydrogen spectrum — ஹைட்ரஜன் நிறமாலை
Hyperfine structure — மீநுண் வரியமைப்பு
Hypothesis — புனைவுகோள்

I

Ideal gas — இலட்சிய வாயு
Identical — முழுதும் ஒத்த, சர்வசம
Illumination — ஒளியூட்டம்
Image — பிம்பம்
Imaginary — மெய்யிலா, கற்பனையான
Impact — மோதல்
Inactive — செயலிலா
Incident ray — படுகதிர்
Incident wave front — படுகதிர் அலைமுகப்பு
Inclination — சாய்வு
Indefiniteness — ஐயப்பாடு, நிலையில்லாமை
Independent — சாராத, சார்பிலாத
Independent variable — சாரா மாறி
Indeterminancy — ஐயப்பாடு, நிலையில்லாமை
Indicate — சுட்டிக்காட்டு
Indicator — காட்டி
Induced — தூண்டப்பட்ட
Inductance — மின் நிலைமம்
Induction coil — தூண்டு மின்சுருள்
Inertia — நிலைமம்
Inertial system — நிலைமத் தொகுதி
Inference — வினைகோள், அனுமானம்
Infinite — எண்ணிலா, ஈறிலா, முடிவில்லாத
Infinity — எண்ணிலி, ஈறிலி
Ingredient — கூறு
Inlet — ஏற்புவாய், அகவாய்
Instantanous — உடன் நிகழக்கூடிய
Instrument — கருவி

Insulation — காப்பு
Insulator — காப்பான்
Integer — முழு எண்
Integral — தொகை
Integrate — தொகை காண்
Integration — தொகையிடல், தொகைகாணல்
Integration term by term — தொடர் உறுப்புத் தொகை காணல்
Integral multiple — முழு எண் மடங்கு
Intensity — செறிவு
Intercept — வெட்டுத் துண்டு
Interfere — இடையீடு
Interference — குறுக்கீட்டு விளைவு
Interference pattern — குறுக்கீட்டுப் பாங்கம்
Interferometer — குறுக்கீட்டு விளைவுமானி
Internal energy — அக ஆற்றல்
Interpretation — விளக்கம்
Intersect — இடைவெட்டு
Interspace — இடைவெளி
Interstellar space — வான்மீனிடைவெளி
Inverse square law — எதிர்விகித இருமடிவிதி
Ion — அயனி
Ionisation — அயனியாக்கம்
Irradiation — கதிர்வீச்சுக்குட்படுத்தல்

J

Junction — சந்தி
Jupiter — வியாழன்

K

Kilogram — கிலோகிராம்
Kinetic energy — இயக்க ஆற்றல்
Kinetic theory of gases — வாயுக்களின் இயக்கவியல் கொள்கை
Kirchoff's Law — கிர்க்காஃப் விதி
Knobs — குமிழ்கள்

L

Laboratory — ஆய்வுக்கூடம், சோதனைக் கூடம்

Laplace correction — லாப்லாஸ் திருத்தம்
Laplacian operator — லேப்லாசியன் ஆபரேட்டர்
Laser — லேசர்
Latent roots — சிறப்பியல்பு அல்லது ஐகன் மூலங்கள்
Latitude — குறுக்குக் கோடு
Layer — அடுக்கு
Lens — வில்லை
Light — ஒளி
Light quantum — ஒளிக் குவான்டம்
Limit — எல்லை, வரம்பு
Limiting angle — வரம்புக் கோணம்
Limiting case — எல்லை வகை
Limiting equilibrium — வரம்புச் சமநிலை
Limiting value — எல்லை மதிப்பு
Linear — ஒருபடிக்குரிய
Linearly independent — ஒருபடி சாராதது
Linearly independent set — ஒருபடி சாராத கணம்
Linear velocity — நேர்கோட்டு வேகம்
Line integral — கோட்டுத் தொகுதி
Locus — நியமப் பாதை
Logarithm — மடக்கை
Longitudinal wave motion — நெட்டலையியக்கம்
Lorentz transformation — லோரன்ஸ்ட் நிலைமாற்றம்

M

Macroscopic — பேரளவு
Macroscopic world — பேரளவு உலகு
Magnetic field — காந்தப் புலம்
Magnetic force — காந்த விசை
Magnetic quantum number — காந்தக் குவான்டம் எண்
Magnification — உருப்பெருக்கம்
Magnifying power — உருப்பெருக்கத் திறன்
Magnitude — எண் மதிப்பு
Magnitude and direction — எண் மதிப்பும் திசையும்
Mask — திரை, மறைப்புத்திரை
Mass — நிறை, பொருண்மை
Mass defect — நிறைக் குறைபாடு
Mass - energy equivalence — பொருண்மை, ஆற்றல் இணைமாற்று (சமத்துவம்)

Mass energy relation	—	பொருண்மை - ஆற்றல் தொடர்பு
Mass number	—	நிறை எண்
Material particle	—	பருப்பொருள் துகள்
Matrices	—	அணிகள்
Matrix	—	அணி
Matrix algebra	—	அணி இயல் கணிதம்
Matrix column	—	நிரல் அணி
Matrix diagonal	—	மூலைவிட்ட அணி
Matrix elements	—	அணி உறுப்புகள்
Matrix mechanics	—	அணி விசையியல், அணி எந்திரவியல்
Matrix row	—	நிரை அணி
Matrix unit	—	அணி அலகு
Matter	—	பருப்பொருள்
Matter wave	—	பொருள் அலை
Maximum	—	பெருமம்
Maximum energy	—	பெரும ஆற்றல்
Maximum efficiency	—	பெருமப் பயனுறுதிறன்
Maximum reflection	—	பெருமப் பிரதிபலிப்பு
Maxwell's Law of Distribution	—	மேக்ஸ்வெல்லின் பங்கீட்டு விதி, பரவல் விதி
Mechanics	—	விசையியல், எந்திரவியல்
Medium	—	ஊடகம்
Metal knobs	—	உலோகக் குமிழ்கள்
Meteorite	—	விண்வீழ் கல்
Meter	—	மானி
Microscope	—	நுண்ணோக்கி
Microscopic	—	நுண்ணியலான
Microscopic state	—	நுண்ணியல் நிலை
Milky way	—	பால் வழி, பால் மண்டலம்
Minimum	—	சிறுமம்
Minkowski world	—	மின்கோவ்ஸ்கியின் உலகு
Minutes	—	நிமிடங்கள்
Mirror	—	ஆடி
Mirror strip	—	ஆடித் துண்டு
Modes of vibration	—	அதிர்வு வகைகள்
Modulation	—	அலைப்பண்பேற்றம்
Modulation—amplitude	—	அலைவீச்சுப் பண்பேற்றம்
Modulation—frequency	—	அலை அதிர்வெண் பண்பேற்றம்

Modulation—phase — அலைக் கட்டப் பண்பேற்றம்
Molecular attraction — மூலக்கூறு கவர்ச்சி
Molecular scattering — மூலக்கூறு ஒளிச்சிதறல்
Molecular Theory — மூலக்கூறு கொள்கை
Molecular weight — மூலக்கூறு எடை
Molecule — மூலக்கூறு
Moment of inertia — நிலைமதிருப்புதிறன்
Momentum — உந்தம்
Monoatomic molecule — ஒற்றை அணு மூலக்கூறு
Monochromatic light — ஒற்றை நிற ஒளி
Monochromatic source — ஒற்றை நிற மூலம்
Monochromatic wave train — ஒற்றைநிற அலைத்தொடர்
Motion — இயக்கம்
Motion under gravity — ஈர்ப்பு வினை இயக்கம்
Multiple — மடங்கு
Multiplication factor — பெருக்க எண்
Multiplier — பெருக்கி

N

Natural frequency — இயல் அதிர்வெண்
Near point — அண்மைப் புள்ளி
Negative — எதிர்
Negative energy level — எதிராற்றல் மட்டம்
Negative result — எதிர்முடிவு
Neutron — நியூட்ரான்
Node — கணு
Normal — இயல்பான, நேர்குத்துக்கோடு
Normal acceleration — நேர்குத்து முடுக்கம்
Normal force — நேர்குத்து விசை
Normal function — நார்மல் சார்பலன், இயல்பு சார்பலன்
Normal incidence — நேர்குத்துப் படுகை
Normalisation — நார்மலாக்கப்படல்
Normalised solution — நார்மலாக்கப்பட்ட தீர்வு
Normal reaction — நேர்குத்து எதிர்வினை
Normal state — இயல்பு நிலை
Notation — குறியீடு
Nuclear model — அணுக்கரு மாதிரி அமைப்பு
Nucleus — அணுக்கரு

Numerical — எண்ணுக்குரிய,எண்ணாலாகிய
Numerical value — எண் மதிப்பு

O

Objective — பொருளருகு வில்லை
Oblique incidence — சாய்வுப் படுகை
Observable — கண்டறியக்கூடிய
Observation — காட்சிப் பதிவு
Observer — நோக்குநர்
Odd number — ஒற்றை எண்
Opaque — ஒளிபுகா
Operation — செயல், செய்கை
Opereator — ஆபரேட்டர், செயலி
Optical path — ஒளிப்பாதை
Optics — ஒளியியல்
Orbit — சுற்றுப்பாதை
Orbit at quantum number — வீதிநிலைக் குவான்ட எண்
Order — வரிசை
Ordinate — குத்தாயம்
Orientation — முகப்பு நிலை
Origin — தோற்றுவாய், ஆதி
Orthogonal — செங்குத்தான
Orthogonal function — குத்துச்சார்பலன்
Orthogonal matrix — செங்குத்தணி
Oscillation — அலைவு
Oscillator — அலைவியற்றி
Overlapping — மேற்பொருந்தும்

P

Packet — பெட்டகம்
Packet of waves — பெட்டக அலைகள்
Pair production — இரட்டைத்துகளாக்கம்
Parabola — பரவளையம்
Parallel forces — இணை விசைகள்
Partials — பகுதிகள்
Particle — துகள்
Path difference — பாதை வேறுபாடு
Path equivalence — பாதைச் சமன்

Pattern — அமைப்பு
Peak — முனை
Penetration — ஊடுருவல்
Perfect gas — இலட்சிய வாயு
Perfectly black body — முழுக் கரும்பொருள்
Perfect radiator — இலட்சியக் கதிர்வீசுவான்
Perihelion — அண்மைப் புள்ளி, அருகுப் புள்ளி (சூரியனிடமிருந்து)
Periodicity — இடையிடை நிகழ்வு, மடக்கு நிலை
Period of oscillation — அலைவு நேரம்
Period of revolution — சுற்று நேரம்
Period of rotation — சுழற்சி நேரம்
Perpendicular — நேர்குத்துக்கோடு
Phase — கட்டம்
Phase change — கட்டமாற்றம், நிலைமாற்றம்
Phase difference — கட்டப்பெயர்ச்சி
Phase factor — கட்ட உறுப்பு
Phase shift — கட்டப் பெயர்ச்சி
Phase velocity — கட்டத் திசைவேகம்
Phenomenon — தோற்றப்பாடு
Photo electricity — ஒளி மின்னியல்
Photo electric effect — ஒளி மின் விளைவு
Photo electron — ஒளி எலெக்ட்ரான்
Photographic plate — ஒளிப்படத் தட்டு
Photon — ஃபோட்டான்
Physical optics — பௌதிக ஒளியியல்
Physical state — பௌதிக நிலை
Physics — இயற்பியல், பௌதிகம்
Plane mirror — சமதள ஆடி
Planetary motion — கோளியல் இயக்கம்
Plane waves — சமதள அலைகள்
Platform — மேடை
Pole — துருவம்
Polar co-ordinates — கோண தூரக் கூறுகள், துருவ ஆயத்தொலைகள்
Position — நிலை
Position vector — வெக்டர் நிலை
Positive — நேர்
Positive charge — நேர் மின்னூட்டம்

Positron — பாசிட்ரான் (துகள்)
Postulate — எடுகோள்
Potential — மின் அழுத்தம்
Potential (gravitational) — ஈர்ப்பழுத்தம்
Potential barrier — மின்னழுத்த அரண்
Potential difference — மின்னழுத்த வேறுபாடு
Potential energy — நிலை ஆற்றல்
Precaution — முன் எச்சரிக்கை
Precession — அச்சுச் சுழற்சி
Precise — திட்டமான
Precision — திட்பம்
Prediction — வருமுன்னுரைத்தல்
Preserves — போற்றுகிறது, காக்கிறது
Pressure — அழுத்தம்
Principle — தத்துவம், கோட்பாடு
Principal maximum — முக்கியப் பெருமம்
Principle of Conservation of Energy — ஆற்றல் அழிவின்மைத் தத்துவம்
Principle of Conservation of Momentum — உந்த அழிவின்மைத் தத்துவம்
Probability — நிகழ்தகவு, நிகழ்திறம்
Probability density — நிகழ்தகவு அடர்த்தி
Probabilistic Theory — நிகழ்தகவுக் கோட்பாடு
Problem — புதிர், உத்திக்கணக்கு, பிரச்சினை
Procedure — வழிமுறை
Progressive waves — முன்னேறு அலைகள்
Propagation — பரப்பல்
Propagation constant — பரப்பல் மாறிலி
Properties of matter — பருப்பொருள் பண்புகள்
Proton — புரோட்டான்

Q

Qualitative — பண்பியலான
Quantisation — குவான்டங்களாக்கல்
Quantitative — அளவியலான
Quantity — கணியம், அளவு
Quantum — குவான்டம்
Quantum condition — குவான்டம் நிபந்தனை

Quantum number — குவான்டம் எண்
Quantum Theory — குவான்டம் கொள்கை
Quartz crystal — குவார்ட்ஸ் படிகம்
Quiescent time — அமைதிநேரம்
Quotient — ஈவு

R

Radial acceleration — ஆரை முடுக்கம்
Radial Doppler Effect — ஆரைக்கால் டாப்ளர் விளைவு
Radians — ஆரையன்கள்
Radiant energy — வீசுகதிர் ஆற்றல்
Radiation — வீசுகதிர், கதிர்வீச்சு
Radioactivity — கதிர்இயக்கம்
Radius — ஆரம்
Radius of curvature — வளைவு ஆரம்
Radius of the orbit — சுற்றுப் பாதை ஆரம்
Range — நெடுக்கம்
Rank — தரம், மதிப்பிடம்
Rays — கதிர்கள்
Reaction — எதிர்வினை
Reading — அளவீடு
Real — மெய்யான
Reciprocal — தலைகீழ், தலைகீழான
Reckon — கணக்கிடல்
Recoil — பின் உதைப்பு
Recording — பதிவீடு
Rectangle — செவ்வகம்
Rectilinear propagation — நேர்கோட்டுப் பரவல்
Red — சிவப்பு
Reduction — ஒடுக்கம்
Reference — மேற்கோள்
Reflected beam — எதிரொளிப்புக் கற்றை
Reflected intensity — எதிரொளிப்புச் செறிவு
Reflection — எதிரொளிப்பு
Reflection co-efficient — எதிரொளிப்பு எண்
Reflector — எதிரொளிப்பான்
Refracted beam — விலகு கதிர்க்கற்றை
Refraction — ஒளி விலகல்
Refractive index — ஒளி விலகலெண்

Relation — தொடர்பு
Relativity — சார்பியல்
Relativity Theory — சார்புக்கொள்கை
Representation — குறிப்பு, விளக்கம், வகைக் குறிப்பு
Representative — குறிப்பான்
Repulsion — எதிர்த்துத் தள்ளுதல்
Research laboratory — ஆய்வுக் கூடம்
Resolving power — பகுதிறன்
Resolution — பிரிப்பு, கூறுபாடு, பகுப்பு
Resolution of forces — விசைப் பகுப்பு
Resonance — இயைவு, ஒத்திசைவு
Resonator — பயன், முடிவு
Result — ஒத்த தீர்வு
Resultant amplitude — தொகுபயன் வீச்சு
Resultant displacement — தொகுபயன் பெயர்ச்சி
Resultant force — தொகுபயன் விசை
Retarding potential — எதிர்முடுக்க மின்னழுத்தம்
Reverse — திருப்பு
Revolution — சுற்று
Rigid rotator — திண்சுழலி
Roots — மூலங்கள்
Rotor — சுழலி

S

Satellite — துணைக்கோள், துணைவன்
Saturation — தெவிட்டுநிலை
Scalar — ஸ்கேலார்
Scale — அளவுகோல்
Scattering — சிதறல்
Scattering co-efficient — சிதறல் எண்
Scattering of light — ஒளிச் சிதறல்
Scientific Theory — அறிவியற் கொள்கை
Screen — திரை
Secondary — துணையான
Secondary electron — இரண்டாம்நிலை எலெக்ட்ரான்
Secondary maxima — துணைப் பெருமம்
Selection rule — தேர்வு விதி
Semi vertical angle — அரைச் செங்குத்துக் கோணம்

Series — தொடர்
Set — கணம்
Set of rules — விதிகளின் கணம்
Shift — பெயர்ச்சி
Shift of fringes — ஒளிவரிப் பெயர்வு
Signal — சைகை
Similar — வடிவொத்த
Simple harmonic motion — சீரியல்பான இயக்கம்
Simultaneous equation — ஒருங்கமை சமன்பாடு
Sine curve — சைன் வளைகோடு
Single slit — ஒற்றைப் பிளவு
Single valued function — ஒரு மதிப்புடைச் சார்பலன்
Slab — பாளம்
Slit — பிளவு
Slope — சரிவு, சாய்வுவிகிதம்
Soldering — பற்றவைப்பு
Solid — திடப்பொருள்
Solution — தீர்வு
Solution general — பொதுத் தீர்வு
Solution particular — குறிப்பிட்ட தீர்வு
Source — மூலம்
Spaning set or generating set — பிறப்பி
Specific charge — மின்னூட்ட நிறைதகவு
Spectra — நிறமாலைகள்
Speed — வேகம்
Speed of rotation — சுழல்வேகம்
Spherical co-ordinates — கோள ஆயத்தொலைவுகள், கோளக் கூறுகள்
Sperical waves — கோள அலைகள்
Spin — தற்சுழற்சி
Spur — அணியின் மூலைவிட்ட உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை
Square Law — இருமடி விதி
Square root — இருமடி மூலம்
Stability — நிலைப்பாடு
Stable equilibrium — நிலைச் சமநிலை
Stable nucleus — நிலையான அணுக்கரு
Standardisation — படித்தரம் பார்த்தல்
Standing wave — நிலை அலை
Statement — கூற்று

Statics — நிலையியல்
Stationary state — நிலையான நிலை
Stationary vibrations — நிலை அதிர்வுகள்
Statistical mechanics — புள்ளியியல் விசையியல்
Statistics — புள்ளியியல்
Structure — இயலமைப்பு
Substitute — பிரதியிடுதல்
Substitution — பதிலீடு, பிரதியீடு
Successive — அடுத்தடுத்த
Suffix — கீழ்க்குறி
Superposition — மேற்பொருத்தல்
Symmetric or symmetrical — சமச்சீரான
Symmetric property — சமச்சீர்ப் பண்பு
Synchronisation — இசைவுப் பொருத்தம்
Systems of units — அலகு முறைகள்

T

Tangent — தொடுகோடு
Tangential force — தொடுவியல் விசை
Target — இலக்கு
Technique — உத்தி
Telescope — தொலைநோக்கி
Term — உறுப்பு
Terminal velocity — முற்றுத் திசைவேகம்
Theory — கொள்கை
Theory of exchanges — பரிமாற்றியல் கொள்கை
Thermal radiation — வெப்பக் கதிர்வீசல்
Thermo dynamics — வெப்ப இயக்கவியல்
Three dimensional — முப்பரிமாண
Threshold frequency — பயன்தொடக்க அதிர்வெண்
Time dilation — நேரநீட்சி, நேர விரிவு
Total reflection — முழு எதிரொளிப்பு
Trace — அணியின் மூலைவிட்ட உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை
Transformation — நிலை மாற்றம்
Translatory force — நேர்பெயர்ச்சி விசை
Transmission — செலுத்துகை
Transmission co-efficient — செலுத்துகை எண்

Transverse Doppler Effect — குறுக்கு டாப்ளர் விளைவு
Transverse wave motion — குறுக்கலையியக்கம்
Transverse waves — குறுக்கலைகள்
Tunnel effect — புழல் விளைவு
Type — வகை

U

Ultimate — இறுதியான
Ultra-violet — புறஊதா
Uncertainty Principle — ஐயப்பாட்டுக் கொள்கை
Undulatory Theory — அலையியல் கொள்கை
Uniform dilation — சீர் விரிவு
Uniform velocity — சீர்திசைவேகம்
Unit — அடிப்படை அலகு
Unit matrix — அணி அலகு
Unit of length — நீள அலகு
Unit of time — கால அலகு
Unit vector — அலகு வெக்டர்
Universal constant — பொது மாறிலி
Upper limit — உயர் வரம்பு

V

Vacuum — வெற்றிடம்
Variable — மாறி
Variable velocity — மாறுபாடு திசைவேகம்
Variate — மாறி
Variation — மாற்றம்
Vector — வெக்டர்
Vector diagram — திசையி வரிப்படம், வெக்டர் வரிப்பு
Vector model — வெக்டர் மாதிரி அமைப்பு
Vector product — வெக்டர் குறுக்குப் பெருக்கி
Velocity — திசைவேகம்
Velocity angular — சுழல்வேகம்
Velocity radial — ஆரை வேகம்
Velocity ratio — திசைவேகத் தகைவு
Velocity relative — சார்திசை வேகம்
Verification — சரிபார்த்தல்

Verify — சரிபார்
Vibration — அதிர்வு
Vibrational energy — அதிர்வு ஆற்றல்
Vibratory motion — அதிர்வியக்கம்
Virgo — கன்னி
Visible — கட்புலனுறுதல்
Volt — வோல்ட்
Volume — பருமன்
Volume element — பரும எளிய பகுதி
Volume integral — கனவழித்தொகை

W

Wave analysis — அலைப்பகுப்பாய்வு
Wave envelope — அலைமுகம்
Wave equation — அலைச்சமன்பாடு
Wave function — அலைச்சார்பலன், அலை அணிக்கோவை
Wave front — அலைமுகம்
Wave group — அலைத்தொகுப்பு
Wave-length — அலைநீளம்
Wave-length range — அலை நீள நெடுக்கம்
Wave mechanics — அலை விசையியல், அலையியக்கவியல், அலை எந்திரவியல்
Wave motion — அலையியக்கம்
Wave number — அலை எண்
Wave packet — அலைப்பெட்டகம்
Wave surface — அலைப்பரப்பு
Wave Theory — அலைக்கொள்கை
Wave train — அலைத்தொடர்
Wave velocity — அலைத் திசைவேகம்
Weighted average — நிறையிட்ட சராசரி
Welding — உருக்கி இணைத்தல்
Werner Heisenberg — வெர்னர் ஹெய்ஸ்சன்பர்க்
White dwarfs — குள்ள விண்மீன்கள்
Width — அகலம்
Wien's Displacement law — வியனின் பெயர்ச்சி விதி
Work — வினை, செயல்
Work external — வெளிவேலை
Work function — வெளியேற்று ஆற்றல்
Work internal — உள்வேலை

X

X-rays — எக்ஸ்-கதிர்கள்
X-ray scattering — எக்ஸ்-கதிர் சிதறல்

Z

Zeeman Effect — சீமன் விளைவு
Zenith — நேர் உச்சிப் புள்ளி
Zero — சுழி
Zero point energy — சுழிப்புள்ளி ஆற்றல்
Zinc plate — துத்தநாகத் தகடு
Zodiae — ஞாயிற்று வீதி, இராசிச் சக்கரம்
Zodiacal light — ஓரைவட்ட ஒளி
Zone — மண்டலம்
